BORIS APSEN

REPETITORIJ VIŠE MATEMATIKE

4

TEHNIČKA KNJIGA • ZAGREB

Dr ing. BORIS APSEN

REPETITORIJ VIŠE MATEMATIKE

IV DIO

KOMPLEKSNI BROJEVI I FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMJENLJIVE
MATRICE I MATRIČNI RAČUN

TEHNIČKA KNJIGA
ZAGREB

PREDGOVOR

Novi zahtjevi nauke i tehnike traže od inženjera i tehničara znatno više znanja iz pojedinih poglavlja više matematike, nego što se do sada redovito predavalo na tehničkim fakultetima i drugim tehničkim školama. Idući u susret tim zahtjevima znatno je povećan u posljednje vrijeme program matematike u našim višim školama uvođenjem posebnih poglavlja iz matematike potrebnih inženjerima našeg doba.

Među ostalim matematičkim disciplinama osobito značenje dobili su teorija funkcija kompleksne promjenljive, elementi linearne algebre i parcijalne diferencijalne jednadžbe. U našoj matematičkoj literaturi ta su poglavlja matematičke nauke opširno obrađena, ali način izlaganja nije takav da bi široki slojevi inženjera i tehničara mogli to lako asimilirati. Potrebu proširenja matematičkog znanja i olakšanja usvajanja tog gradiva kod širih slojeva tehničkog osoblja opazili su i mnogi ruski matematičari te se pojavio niz izvrsnih publikacija na primjer Ževeržeeva, Kaljnickoga, Sapogova, Zeljdoviča i drugih, kojim je cilj da se popune praznine u matematičkom znanju.

Idući u susret željama mnogobrojnih čitalaca mojih matematičkih radova i ostajući pri tome dosljedan osnovnom cilju svoga rada, da olakšam studij matematike našoj mladoj generaciji, a u prvom redu onim studentima, inženjerima i tehničarima koji radeći daleko od kulturnih centara hoće samostalno proširiti svoje matematičko znanje, obradio sam u ovoj knjizi na temelju radova ruskih matematičara, a djelomično i američkih, dva poglavlja više matematike i to teoriju funkcija kompleksne promjenljive i poglavlje iz elemenata linearne algebre — Matrice i matrični račun.

Moj zadatak je bio da ta poglavlja obradim na što jednostavniji način, uvijek s obzirom na primjenu matematičkog gradiva u tehničkoj praksi, dok sam formalne dokaze, promatranje izuzetaka i komplicirajućih faktora po mogućnosti izostavio, kao i dokaze kod mnogih teorema, ali sam uložio mnogo truda da opširno obrazložim smisao tih teorema, a njihovu primjenu sam pokazao na mnogobrojnim primjerima izrađenim u svim pojedinostima; također sam naveo mnogo primjera za vježbu.

Nadam se da će moj novi trud dobro doći i onim čitaocima mojih knjiga, kojim je matematika hobi i odmor nakon monotonije radnog dana. Prijelaz od realnog broja na kompleksni otvorit će pred njima novi svijet kompleksnih brojeva, za koje je još Leibniz (1646-1716) rekao: »*Kompleksni broj je profinjeno i frapantno sredstvo božanskog duha, gotovo amfibija između biti i nebiti.*«

Na kraju opet molim svoje uvažene čitaoce da mi slobodno jave svoje primjedbe i želje i da me upozore na moguće greške koje je teško izbjeći.

Moja adresa: *B. Apsen*
Zagreb, Vončinina ul. 8

SADRŽAJ

Strana

Predgovor 5

I. KOMPLEKSNI BROJEVI I FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMJENLJIVE

§ 1. O kompleksnim brojevima 11

1. Pojam kompleksnog broja 11
2. Oblici kompleksnih brojeva i njihovo grafičko predočivanje 12
   a. Algebarski oblik kompleksnog broja 12
   b. Vektorski oblik kompleksnog broja 14
   c. Geometrijsko značenje relacija koje sadrže kompleksne brojeve oblika $z = x + i y$ 15
   d. Trigonometrijski oblik kompleksnog broja 18
   e. Geometrijsko značenje relacija koje sadrže kompleksne brojeve u obliku $z = r(\cos + i \sin \varphi)$ 21
   f. Eksponencijalni oblik kompleksnog broja 23

§ 2. Operacije s kompleksnim brojevima 27

1. Zbrajanje i oduzimanje 27
2. Množenje 27
3. Dijeljenje 28
4. Potenciranje (na cijeli pozitivni eksponent). Moivreove formule i njihova primjena 32
5. Korjenovanje 37
   a. Eksponent radikanda z je $1/n$ 37
   b. Eksponent radikanda z je $p/q \neq n$ 40

§ 3. Svojstva konjugirano kompleksnih brojeva. O korijenima algebarskih jednadžbi s realnim koeficijentima 43

§ 4. Beskonačni nizovi i redovi kompleksnih brojeva 47

§ 5. Elementarne funkcije kompleksne promjenljive 51

1. Eksponencijalna funkcija 51
2. Logaritamska funkcija 52
3. Trigonometrijske funkcije 55
4. Arkus-funkcije 59
5. Hiperbolne funkcije 62
6. Area-funkcije 65
7. Opća eksponencijalna funkcija 66

Strana

§ 6. Derivacija i diferencijal funkcije kompleksne promjenljive. Cauchy-Riemannove parcijalne diferencijalne jednadžbe. Analitičke funkcije . . . 68

§ 7. Laplaceova diferencijalna jednadžba. Harmoničke funkcije 76

§ 8. Geometrijsko značenje analitičke funkcije $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ 81

§ 9. Konformno preslikavanje 83

§ 10. Riemannove plohe 92

§ 11. Integral funkcije kompleksne promjenljive 93
1. Pojam 93
2. Računanje integrala 94

§ 12. Neovisnost integrala o putu. Cauchyjev integralni teorem 98

§ 13. Neodređeni integral. Newton-Leibnizova formula 105

§ 14. Cauchyjeva integralna formula. Cauchyjev integral i njegova primjena u računanju konturnih integrala 107

§ 15. Rezidui analitičke funkcije i njihova primjena 111
1. Redovi Taylorovi i Laurentovi za funkciju $f(z)$ 111
2. Singularne točke funkcije $f(z)$ 112
3. Pojam reziduuma, njegovo određivanje i primjena pri rješavanju konturnih integrala 114

§ 16. Reziduum funkcije $f(z)$ s obzirom na beskonačno daleku točku 121

§ 17. Izračunavanje određenih realnih integrala pomoću rezidua 124

II. MATRICE I MATRIČNI RAČUN

§ 1. Pojam. Vrste matrica 133

§ 2. Operacije sa matricama 136
1. Zbrajanje 136
2. Oduzimanje 137
3. Produkt matrice i broja (skalara) α 137
4. Množenje matrice s matricom 137

§ 3. Predočivanje vektora pomoću matrica 143

§ 4. Transponiranje matrica 145

§ 5. Posebne vrste kvadratnih matrica 146
1. Simetrične i kososimetrične kvadratne matrice 146
2. Regularne kvadratne matrice 146
3. Inverz kvadratne matrice 147

§ 6. Recipročna matrica i transponirana recipročna matrica 151

§ 7. Rang matrice 152

§ 8. Rješavanje linearnih matričnih jednadžbi 156

§ 9. Primjena matričnog računa na rješavanje sustava linearnih jednadžbi . 161
1. Sustav nehomogenih linarnih jednadžbi 161
2. Sustav homogenih linearnih jednadžbi 166

§ 10. Rastavljanje matrice u blokove 171

§ 11. Svojstva trokutnih matrica 176

I.

KOMPLEKSNI BROJEVI
I FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMJENLJIVE

§ 1. O KOMPLEKSNIM BROJEVIMA

1. Pojam kompleksnog broja

Poznato je kako se razvijao broj s uvođenjem novih matematičkih operacija*). Polazeći od skupa *prirodnih brojeva*, tj. cijelih pozitivnih brojeva, prelazi se na cijele negativne brojeve i na nulu, da se omogući oduzimanje. Operacija dijeljenja stvara potrebu razlomljenih brojeva, pa nastaje skup *racionalnih brojeva*, tj. cijelih i razlomljenih brojeva pozitivnih i negativnih. Tom se skupu pridružuje skup *iracionalnih brojeva*, koji ispunjavaju praznine između točaka brojnog pravca. Te brojeve možemo uvijek prikazati u obliku beskonačnih neperiodskih decimalnih razlomaka. Oni od tih brojeva, koji mogu biti realnim korijenima algebarskih jednadžbi s cjelobrojnim koeficijentima zovu se *algebarski iracionalni brojevi*, dok su ostali iracionalni brojevi — *transcendentni*, kao npr. brojevi π, e, dekadski logaritmi cijelih brojeva (osim oblika 10^n), većina vrijednosti trigonometrijskih funkcija itd.

Skupovi racionalnih i iracionalnih brojeva čini zajedno skup *realnih brojeva*. Međutim i u tom skupu realnih brojeva nisu uvijek moguće operacije vađenja korijena — ne možemo, na primjer, vaditi korijene parnog stupnja iz negativnih brojeva. Da se omogući i ta operacija, uvode se *kompleksni brojevi* pomoću tako zvane *imaginarne jedinice* i koja se određuje uvjetom $i^2 = -1$, pa je i korijen kvadratne jednadžbe $x^2 = -1$.

Na taj način, ukoliko se uzmu u obzir sva rješenja realna i kompleksna, svaka kvadratna jednadžba ima uvijek dva korijena, kubna jednadžba ima ih tri, jednadžba n-tog stupnja — n korijena, ako se korijeni broje prema svojoj višestrukosti. Treba podvući da daljnje proširenje brojnog sustava nije potrebno, pa je uvođenje kompleksnih brojeva posljednje proširenje tog sustava. Stvarno, ako imamo na raspolaganju kompleksne brojeve, možemo vaditi korijene bilo kojeg stupnja ne samo iz negativnih brojeva, već i iz bilo kojih brojeva. Kao rezultat dobivat ćemo opet kompleksne brojeve.

Osim vađenja korijena u matematici postoje i druge operacije koje ne možemo vršiti, ako se ograničimo samo na realne brojeve. Tako, na primjer, ne bi postajali ni logaritmi negativnih brojeva, jer nema realnog eksponenta koji bi s pozitivnom bazom dao negativan broj. Isto tako nepoznanica φ iz jednadžbe $\cos\varphi = 2$ ne može imati realnu vrijednost, jer znamo da funkcije sinusa i kosinusa primaju vrijednosti iz zatvorenog intervala od -1 do $+1$. Nastaje pitanje, da li je potrebno uvođenje jedne nove imaginarne jedinice različite od i, koja je uvedena da se omo-

*) Vidi npr. „Repetitorij više matematike", I dio od istog autora.

gući vađenje korijena parnog stupnja iz negativnih brojeva? Odgovor je negativan: uvođenje kompleksnih brojeva stvara mogućnost određivanja logaritama negativnih i kompleksnih brojeva, rješavanja jednadžbe oblika $\sin\varphi = k$ i $\cos\varphi = k$, gdje je k bilo koji broj. Ukratko, uvođenje jedne jedine imaginarne jedinice i daje mogućnost da vršimo bilo koje operacije nad bilo kojim realnim i kompleksnim brojevima, a kao rezultat dobivat ćemo opet kompleksne brojeve, pa otpada potreba uvođenja novih brojeva.

2. Oblici kompleksnih brojeva i njihovo grafičko predočivanje

a. Algebarski oblik kompleksnog broja

Algebarski oblik: $z = x + iy$, gdje su x i y realni brojevi.

Kaže se: x je realni dio kompleksnog broja z, tj. $x = R(z)$.
y je imaginarni dio kompleksnog broja z. tj. $y = I(z)$

$i = +\sqrt{-1}$ je imaginarna jedinica određena uvjetom $i^2 = -1$, pa je

$i^0 = 1,$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i,$
$i^1 = i,$	$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1,$
$i^2 = -1,$	$i^9 = i^8 \cdot i = 1 \cdot i = i,$
$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i,$	$i^{10} = i^8 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1,$
$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1,$	$i^{11} = i^8 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i,$
$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i,$	$i^{12} = (i^4)^3 = 1^3 = 1,$
$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1,$	itd.

Općenito: $i^s = i^{4n+m} = i^m$, tj. i^s ima period 4, pa je npr.:

$$i^{31} = i^{4\cdot 7} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i.$$

Za $x = 0$ $z = iy \rightarrow$ čisto imaginarni broj, za $y = 0$ $z = x \rightarrow$ realni broj, pa realne brojeve možemo smatrati kao specijalne slučajeve kompleksnih brojeva kojim su imaginarni dijelovi jednaki nuli.

Jednakost kompleksnih brojeva: Dva su kompleksna broja $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$ međusobno jednaka, kad su im posebno jednaki realni i posebno imaginarni dijelovi, tj.

$$z_1 = z_2, \quad \text{kad je} \quad x_1 = x_2 \quad \text{i} \quad y_1 = y_2.$$

Za kompleksne brojeve *nemaju smisla nejednakosti* $z_1 > z_2$, odnosno $z_1 < z_2$, kao ni $z > 0$, odnosno $z < 0$. Kompleksni broj jednak je nuli, kad je posebno jednak nuli njegov realni dio i posebno njegov imaginarni dio, tj.

$$z = x + iy = 0, \quad \text{kad je} \quad x = 0 \quad \text{i} \quad y = 0.$$

Spomenimo još da dva kompleksna broja koja se razlikuju u predznaku imaginarnog dijela, tj. $z = x + iy$ i $z = x - iy$ čine *par konjugirano kompleksnih brojeva.*

Primjeri

Riješi zadane sustave jednadžbi smatrajući da su x, y, z i t realni brojevi.

1) $(1+i)x + (1+2i)y + (1+3i)z + (1+4i)t = 1 + 5i$
$(3-i)x + (4-2i)y + (1+i)z + 4it = 2 - i.$

Napisavši zadane jednadžbe u obliku:

$$(x+y+z+t) + (x+2y+3z+4t)i = 1+5i$$
$$(3x+4y+z) + (-x-2y+z+4t)i = 2-i$$

i izjednačivši realne i imaginarne dijelove tih kompleksnih brojeva, dobivamo četiri jednadžbe u x, y, z i t:

$x + y + z + t = 1$ I	$x + 2y + 3z + 4t = 5$ III
$3x + 4y + z = 2$ II	$-x - 2y + z + 4t = -1$ IV

Načinivši II − I i III ± IV dobivamo tri jednadžbe:

$$2x + 3y - t = 1; \quad 4z + 8t = 4; \quad 2x + 4y + 2z = 6.$$

Iz prve jednadžbe slijedi:

$$x = -\frac{3}{2}y + \frac{t}{2} + \frac{1}{2}, \tag{a}$$

dok iz ostalih dviju imamo: $z = 1 - 2t$ i $z = 3 - x - 2y$, pa je $1 - 2t = 3 - x - 2y$, a odatle je

$$x = 2 - 2y + 2t. \tag{b}$$

Iz (a) = (b) dobivamo:

$$y = 3t + 3 \tag{c}$$

dok uvrštenje (c) u (b) daje:

$$x = -4t - 4 \tag{d}$$

Uvrstimo li sad (c) i (d) u jednadžbu II, dobit ćemo

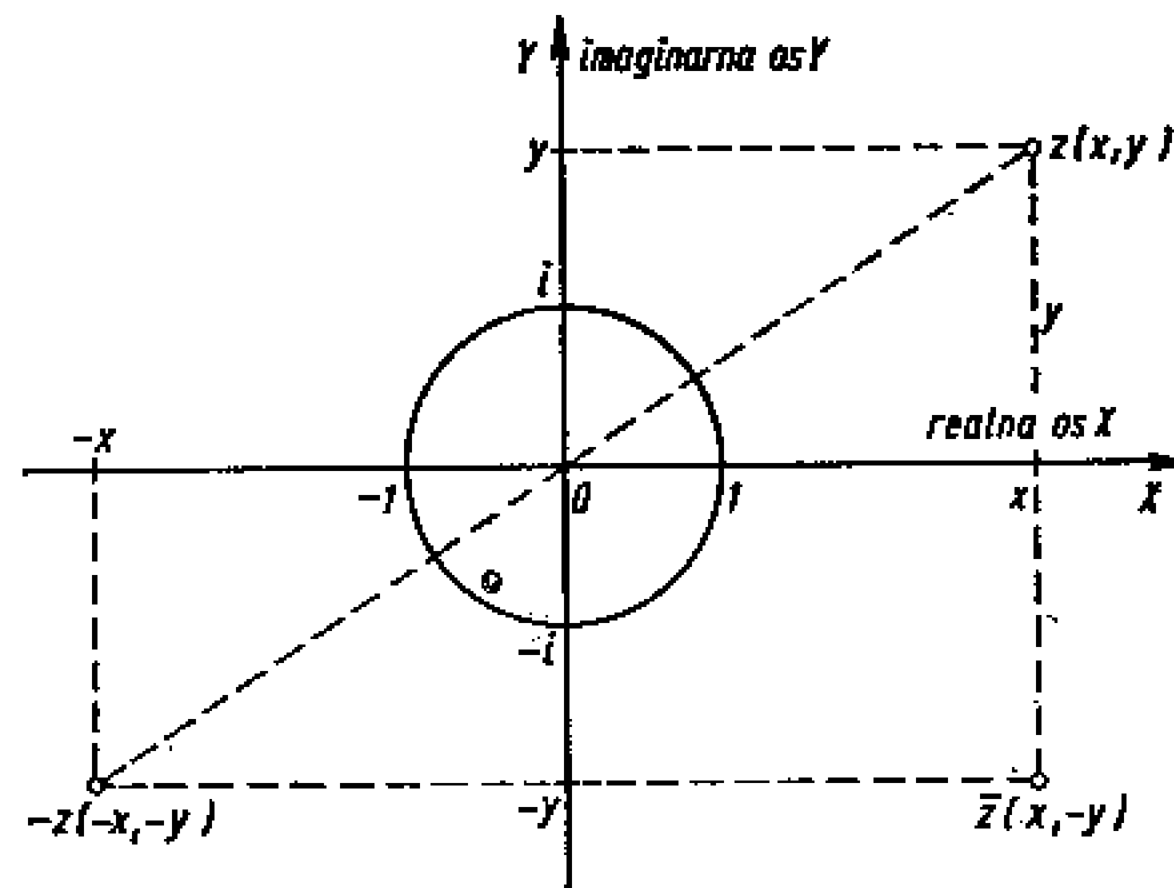
$$\underline{z = 2},$$

dok iz $z = 1 - 2t$ slijedi $2 = 1 - 2t$, pa je $\underline{t = -\frac{1}{2}}$.

Iz (c) i (d) dobivamo konačno $\underline{y = \frac{3}{2}}$ i $\underline{x = -2}$.

2) $(1+2i)x + (3-5i)y = 1 - 3i.$ $\left[x = -\frac{4}{11};\ y = \frac{5}{11}\right]$.

Geometrijsku predodžbu kompleksnih brojeva dobivamo na taj način, da svakom kompleksnom broju $z = x + i\,y$ dodijelimo točku $z\,(x, y)$ u ravnini XOY, koju zovemo ravnina kompleksne promjenljive z ili kraće ***ravnina z***. Vidi sliku 1.



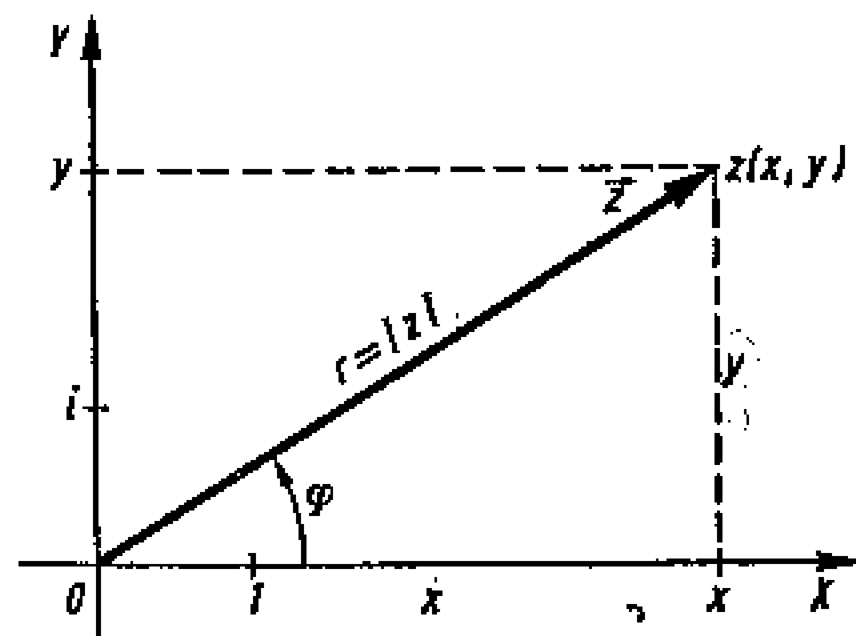
Slika 1.

Svakom kompleksnom broju $z = x + i\,y$ odgovarat će određena točka $z\,(x, y)$ ravnine z i obratno: svakoj točki $z\,(x, y)$ ravnine z odgovarat će određen kompleksni broj $z = x + i\,y$. Vidimo dalje da realni brojevi $z = x$ leže na realnoj osi X pa se prikazuju točkama $(x, 0)$,

Čisto imaginarni brojevi $z = i\,y$ leže na imaginarnoj osi Y pa se prikazuju točkama $(0, y)$, dok kompleksni brojevi leže između osiju. Na slici 1 vidimo također da par konjugirano kompleksnih brojeva leži simetrično s obzirom na realnu os X, a da z i $-z$ leže simetrično s obzirom na ishodište O koordinatnog sustava.

b. Vektorski oblik kompleksnog broja

Kompleksni broj možemo prikazati i u obliku vektora, kojemu je početak u ishodištu O koordinatnog sustava, a kraj u točki $z\,(x,y)$, tj. $\mathbf{z}$ je vektor $\mathbf{Oz} = \mathbf{z}$, kojemu su projekcije na koordinatne osi x i y. Vidi sl. 2.



Slika 2.

Kako se vidi na toj slici

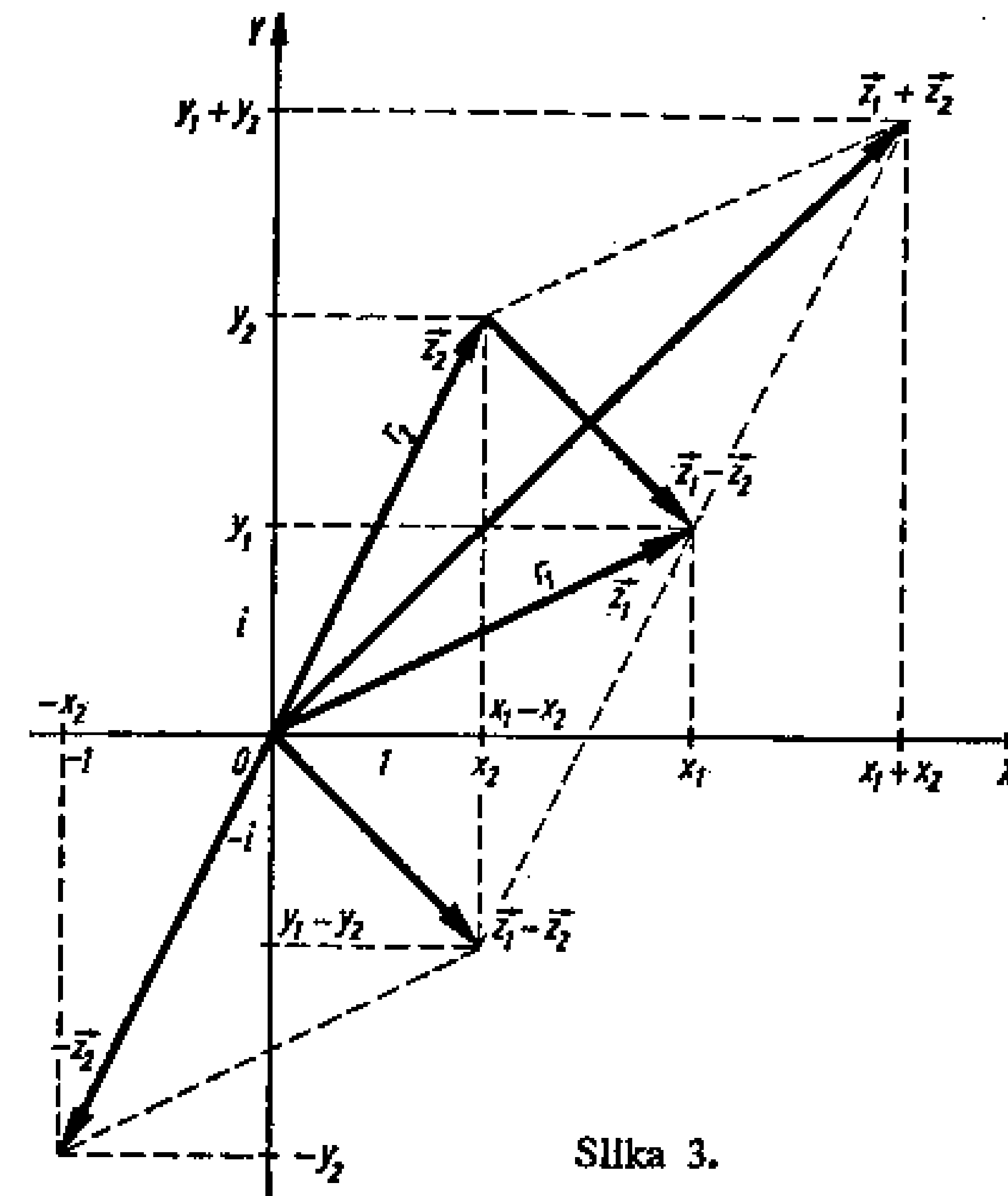
duljina ili *apsolutna vrijednost*

$$\mathbf{z} = |\,\mathbf{z}\,| = r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

dok se *smjer* φ *vektora* $\mathbf{z}$ određuje iz

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Primijetimo da je vektor $\mathbf{z}$ slobodni vektor, pa ga možemo premještati paralelno samom sebi.



Slika 3.

Prikažemo li dva kompleksna broja

$$z_1 = x_1 + i\,y_1$$

i

$$z_2 = x_2 + i\,y_2$$

u obliku vektorâ, tada ćemo zbroj $(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2)$ tih vektora dobiti grafički u obliku dijagonala paralelograma konstruiranog na vektorima $\mathbf{z}_1$ i $\mathbf{z}_2$ kao stranicama. Vidi sl. 3.

Napišemo li razliku $(z_1 - z_2)$ u obliku $z_1 + (-z_2)$, dobit ćemo vektor te razlike tako da zbrojimo po pravilu paralelograma vektore $\mathbf{z}_1 + (-\mathbf{z}_2)$, pa ćemo opaziti kako se to vidi na slici 3, da je vektor razlike $(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2)$ druga dijagonala paralelograma, pri čemu je vektor razlike uvijek usmjeren prema minuendu. Do istih rezultata dolazimo, ako algebarski zbrojimo, odnosno oduzmemo $z_1 = x_1 + i\,y_1$ i $z_2 = x_2 + i\,y_2$:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$$
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2).$$

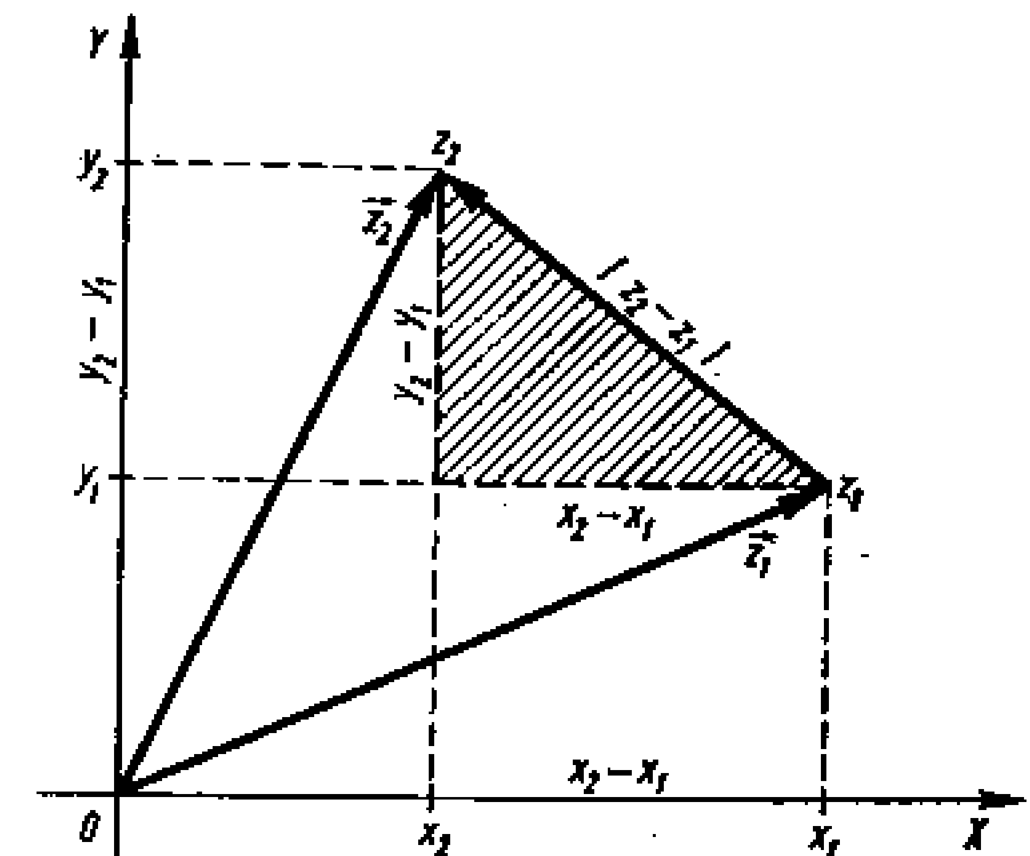
c. Geometrijsko značenje relacija koje sadrže kompleksne brojeve oblika $z = x + i\,y$.

1) Zadane su dvije točke $z_1 = x_1 + i\,y_1$ i $z_2 = x_2 + i\,y_2$ u kompleksnoj ravnini. Pokaži da je apsolutna veličina razlike $|\,z_2 - z_1\,|$ predočena grafički kao međusobna udaljenost tih točaka.

Kako je $z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + i\,(y_2 - y_1)$, prema slici 4 iz šrafiranog pravokutnog trokuta slijedi

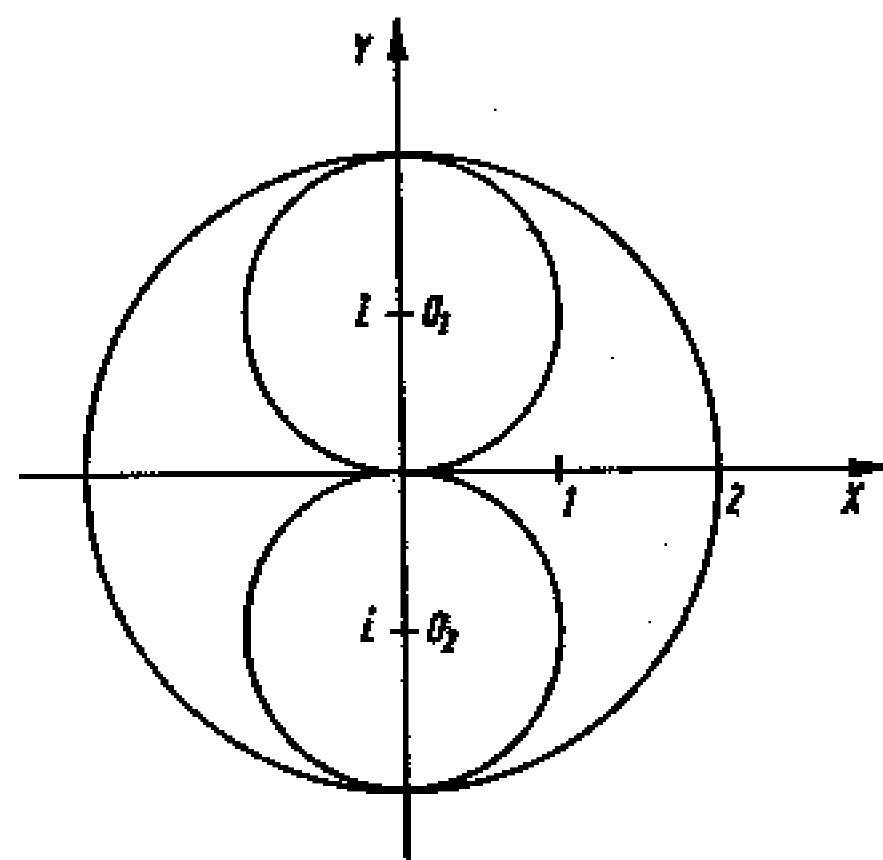
$$|\,z_2 - z_1\,| =$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$

= međusobna udaljenost točaka z_1 i z_2.



Slika 4.

Iz navedenog slijedi prema slici 5,



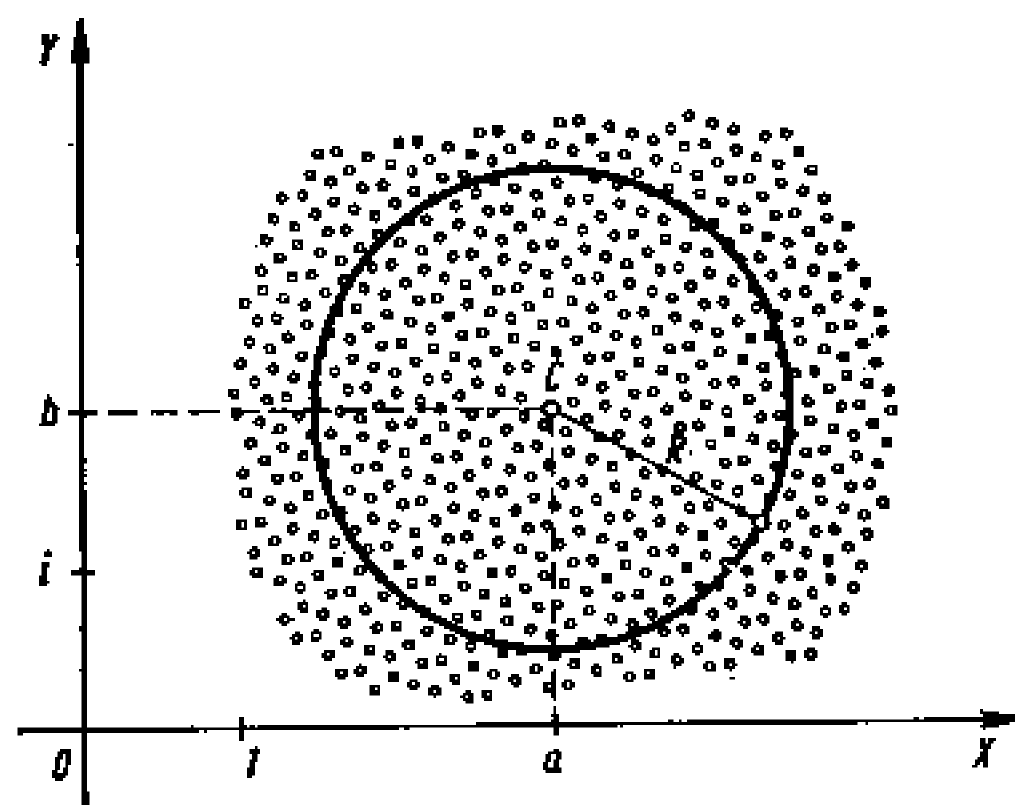
Slika 5.

da izrazi $|z| = 2$, $|z - i| = 1$ i $|z + i| = 1$ predočuju grafički *točke kružnica* i to prvu polumjera 2 sa središtem u O, dok su druge dvije polumjera 1 sa središtima u točkama $O_1(0, i)$ i $O_2(0, -i)$.

2) Pomoću kompleksnih brojeva možemo zadavati različite skupove točaka ravnine z.

a) $|z - c| = R$; $|z - c| < R$ i $|z - c| > R$, gdje je $z = x + iy$, $c = a + ib$ konstantan kompleksni broj, dok je R realna konstanta.

Prema slici 6 predočuje



Slika 6.

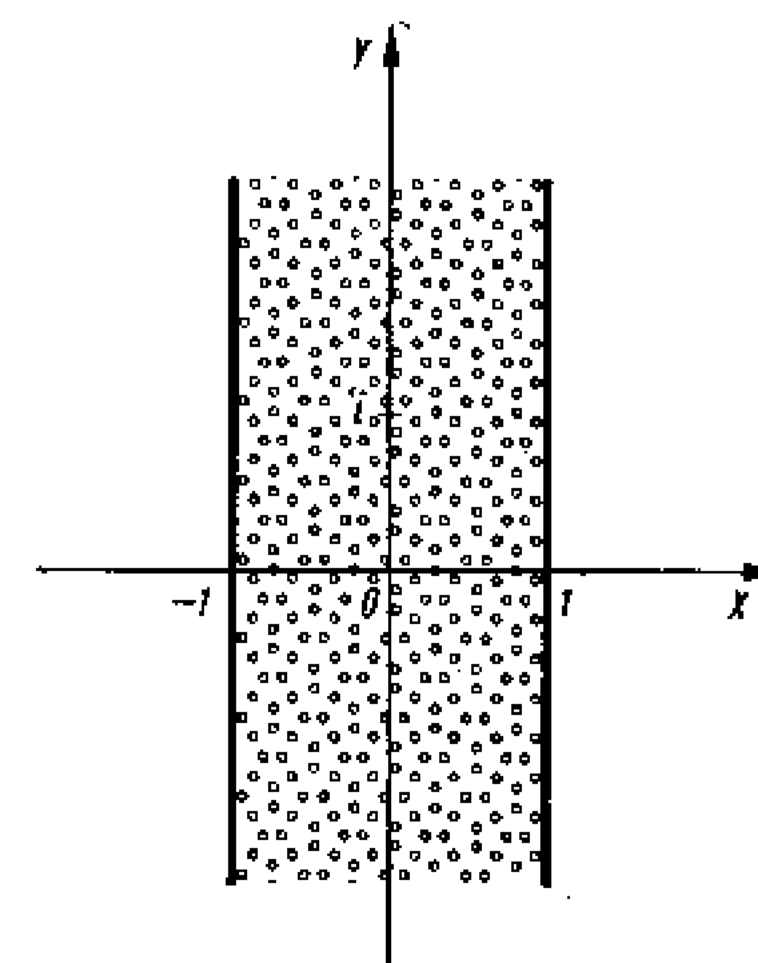
$R = |z - c| = +\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ skup točaka na kružnici polumjera R sa središtem u točki $C(a, b)$;

$|z - c| < R$ skup točaka kruga unutar kružnice $|z - c| = R$;

$|z - c| > R$ skup točaka koje leže izvan kružnice $|z - c| = R$.

b) $R(z) = x > 0$ predočuje skup točaka kompleksne poluravnine z i to desno od imaginarne osi Y, a $I(z) = y < 0$ predočuje skup točaka donje kompleksne poluravnine z.

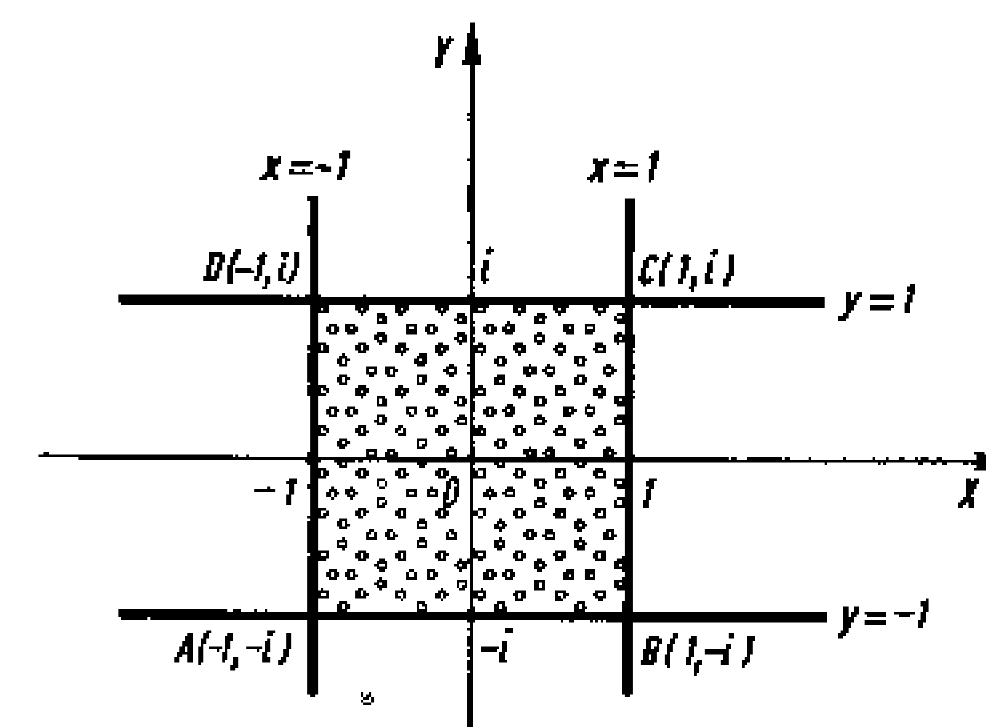
c) $|R(z)| < 1$, tj. $|x| < 1$ predočuje prugu prikazanu na sl. 7.



Slika 7.

Sve točke te pruge osim graničnih udaljene su od imaginarne osi Y za manje od 1.

d) $|I(z)| = |y| < 1$ i $|R(z)| = |x| < 1$.



Slika 8.

Skup točaka određen tim nejednakostima leži u nutrini kvadrata $ABCD$ stranice 2. Vidi sl. 8.

3) Izrazi pomoću nejednakosti, odnosno jednakosti a također i grafički zadane skupove točaka kompleksne ravnine z.

a) Prvi kvadrant koordinatnog sustava

$$[R(z) = x > 0 \text{ i } I(z) = y > 0]$$

b) Poluravninu koja se nalazi iznad realne osi, a sastoji se od točaka kojima udaljenosti od realne osi nisu manje od 2.

$$[I(z) = y > 2].$$

c) Polukrug polumjera 1 (bez kružnice) sa središtem u točki $z = 0$, koji se nalazi slijeva od imaginarne osi

$$[|z| < 1 \text{ i } R(z) < 0].$$

4) Prikaži grafički i analitički zadane udaljenosti.

a) Udaljenost od ishodišta O do točke z.

$$[|z|, \text{ jer je } |z| = |z - 0|].$$

b) Udaljenost od imaginarne osi do točke z.

$$[|R(z)| = |x|].$$

c) Udaljenost od realne osi do točke z.

$$[|I(z)| = |y|, \text{ jer je } |y| = |y - 0|].$$

5) Prikaži grafički skupove točaka, koje su određene zadanim relacijama:

a) $|z| < 1$.

[Krug polumjera 1 sa središtem u O].

b) $|z - i| > 1$.

[Sva kompleksna ravnina z osim kruga i kružnice polumjera 1 sa središtem u točki $(0, i)$].

c) $|z + i| < 2$.

[Krug polumjera 2 sa središtem u točki $(0, -i)$].

d) $1 < |z - 1| < 3$.

[Vijenac omeđen kružnicama polumjera 1 i 3 sa zajedničkim središtem u točki $(1, 0)$. Točke kružnica ne ulaze u zadani skup točaka].

2. Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Neka je $r = Oz$ = udaljenost točke z od ishodišta i
φ = kut što ga r zatvara s pozitivnim smislom osi x. Vidi sliku 9.

Kaže se da je r *modul* kompleksnog broja z, dok je
φ *argument* toga broja.

Ukratko: $r = \text{mod}(z)$ i $\varphi = \text{Arg}\, z$.

Prema slici 9: $x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$,
a uvrštenje u $z = x + iy$ daje

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (1)$$

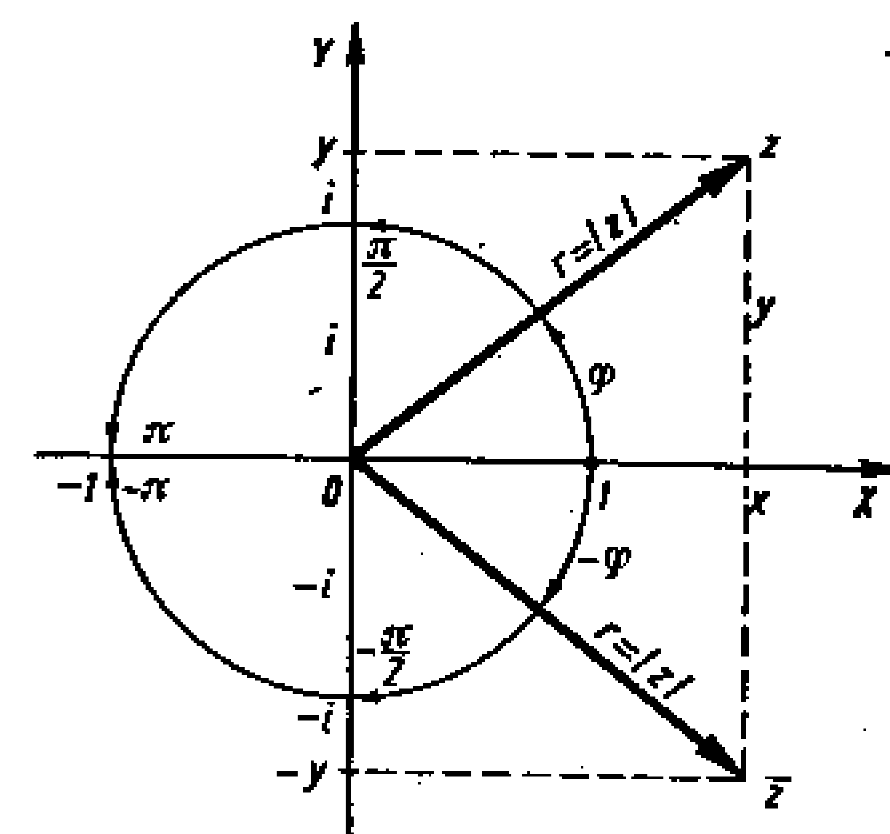
Vidimo da je prema slici 9 modul

$$r = |z| = +\sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1)'$$

jednoznačno određen, dok je

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}, \qquad (1)''$$

pa je $\quad \varphi = \text{Arg}\, z = \text{Arc tg}\, \frac{y}{x}$,



Slika 9.

pa za svaki kompleksni broj z argument φ prima beskonačno mnogo vrijednosti, koje se međusobno razlikuju za pribrojnike mnogokratnika 2π, jer je $\text{Arc tg}\frac{y}{x}$ beskonačno mnogoznačna funkcija*), te je

$$\text{Arg}\, z = \text{arc tg}\frac{y}{x} + 2k\pi, \qquad (2)$$

gdje je $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \cdots$.

Iz navedenog slijedi da su dva kompleksna broja jednaka, kad su im moduli jednaki, dok se argumenti mogu razlikovati za mnogokratnik od 2π. Primijetimo da za $z = 0$ Arg z nije određen. Izdvojimo li iz beskonačno mnogo vrijednosti Arg z jednu, koja se nalazi u intervalu $(-\pi, \pi]$ ili $[0, 2\pi)$ i označimo li je s arg z, dobit ćemo t. zv. *glavnu vrijednost* argumenta z, tj. $\varphi = \arg z$:

$$-\pi < \arg z \leq +\pi \quad \text{ili} \quad 0 \leq \arg z < 2\pi. \qquad (2)'$$

Češće se primjenjuje prva nejednakost.

Postupak za određivanje $\varphi = \arg z$ je jednostavan: pomoću tablica logaritamskih ili prirodnih vrijednosti trigonometrijskih funkcija određujemo kut φ_0, koji odgovara za točke I kvadranta i to pomoću formule

$$\varphi_0 = \arg z_0 = \text{arc tg}\frac{|y|}{|x|}, \qquad (3)$$

dok za točke ostalih kvadranata vršimo preračunavanje kako slijedi:

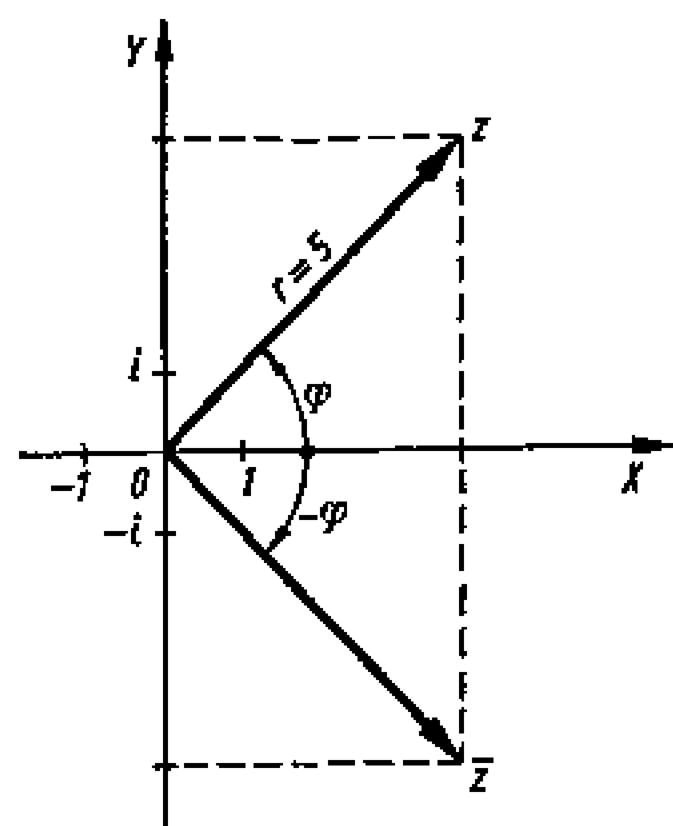
za II kvadrant: $\varphi = \arg z = \pi - \varphi_0$, (3a)

za III kvadrant: $\varphi = \arg z = -(\pi - \varphi_0)$ ili $\varphi = \pi + \varphi_0$,

za IV kvadrant: $\varphi = \arg z = -\varphi_0$ ili $\varphi = 2\pi - \varphi_0$.

*) Vidi npr. od istog autora Repetitorij vrše matematike, I dio, § 6, 2. a).

$r = |z|$ i $\varphi = \arg z$ su *polarne koordinate* točke z, pri čemu je $z_1 = z_2$, ako je $|z_1| = |z_2|$ i $\arg z_1 = \arg z_2$, dok je za jednakost para konjugirano kompleksnih brojeva z i $\bar{z}$ potrebno, da je $|z| = |\bar{z}|$, dok je $\arg z = -\arg \bar{z}$. Vidi sl. 10.



Slika 10.

Prema toj slici imamo:

1) Za točku (1, 0): $r_1 = 1$ i $\varphi_1 = \arg z_1 = 0$, pa je prema (1)

$$z_1 = 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0).$$

Očito je da je za sve realne pozitivne brojeve $\varphi_1 = \arg z = 0$.

2) Za točku $(0, i)$: $r_2 = 1$, $\varphi_2 = \arg z_2 = \frac{\pi}{2}$, pa je

$$z_2 = i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Svi čisto imaginarni pozitivni brojevi imaju argument $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$.

3) Za točku $(-1, 0)$: $r_3 = 1$; $\varphi_3 = \arg z_3 = \pi$ (ili $-\pi$), pa je

$$z_3 = -1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Za sve realne negativne brojeve je $\varphi_3 = \arg z = \pi$ (ili $-\pi$).

4) Za točku $(0, -i)$: $r_4 = 1$; $\varphi_4 = \arg z_4 = -\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{ili } \frac{3}{2}\pi\right)$, pa je

$$z_4 = -i = 1\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Za sve čisto imaginarne negativne brojeve $\varphi_4 = -\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{ili } \frac{3}{2}\pi\right)$. Kompleksni broj, npr. $z = 1 + i\sqrt{3}$ u trigonometrijskom obliku prema formulama (1) glasi, ukoliko se ne ograničimo na glavnu vrijednost:

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left[\left(\cos\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right],$$

jer je $r = \sqrt{1+3} = \underline{2}$, a $\varphi = \text{Arc tg}\,\frac{y}{x} = \text{Arc tg}\,\frac{\sqrt{3}}{1} = \text{arc}\,60° + 2k\pi = \underline{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}$.

Primjeri

Zadane kompleksne brojeve prikaži u trigonometrijskom obliku, a također i grafički uzevši samo glavne vrijednosti.

1. $z = 3 + 4i$ i $\bar{z} = 3 - 4i$.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9 + 16} = \underline{5}.$$

$$\varphi_0 = \arg z = \text{arc tg}\,\frac{4}{3} = \text{arc tg}\,1{,}333\ldots = \text{arc tg}\,1{,}\dot{3}.$$

Pomoću tablica za prirodne vrijednosti trigonometrijskih funkcija i tablica za prijelaz od kutne mjere na lučnu, dobivamo:

$$\varphi_0 \doteq \text{arc}\,53{,}2° = \underline{0{,}928}.$$

$$z = 5(\cos 53{,}2° + i \sin 53{,}2°) = 5(\cos 0{,}928 + i \sin 0{,}928).$$

Za $\bar{z} = 3 - 4i$: $r = 5$; $\varphi_0 = \text{arc tg}\left(\frac{-4}{3}\right) = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}$.

Kako je y (ili sinus) negativan, a x (ili kosinus) pozitivan, kut φ_0 leži u IV kvadrantu, pa je

$$\varphi_0 = 360° - 53{,}2° = 306{,}8° \quad \text{ili} \quad \varphi_0 = -53{,}2°.$$

Slijedi:

$$\bar{z} = 5(\cos 306{,}8° + i \sin 306{,}8°)$$

ili $\bar{z} = 5\,[\cos(-53{,}2°) + i \sin(-53{,}2°)]$, a u lučnoj mjeri kuta

$$\bar{z} = 5\,[\cos(-0{,}928) + i \sin(-0{,}928)].$$

2. $z = -1 + i$ i $\bar{z} = -1 - i$.

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $\text{tg}\,\varphi_0 = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} \to \varphi_0$ je u II kvadrantu, pa je $\varphi_0 = 180° - 45° = 135°$ ili $\varphi_0 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$, odnosno $-\frac{3}{4}\pi$ za $\bar{z}$.

$$\left[\begin{aligned} z &= \sqrt{2}(\cos 135° + i \sin 135°) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i \sin\frac{3}{4}\pi\right); \\ \bar{z} &= \sqrt{2}\,[\cos(-135°) + i \sin(-135°)] = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right]\end{aligned}\right].$$

3. $z = -1 + 5i$; $\bar{z} = -1 - 5i$

$$[z = \sqrt{26}(\cos 101°20' + i \sin 101°20') = \sqrt{26}(\cos 1{,}769 + i \sin 1{,}769].$$

e. Geometrijsko značenje relacija koje sadrže kompleksne brojeve u obliku $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

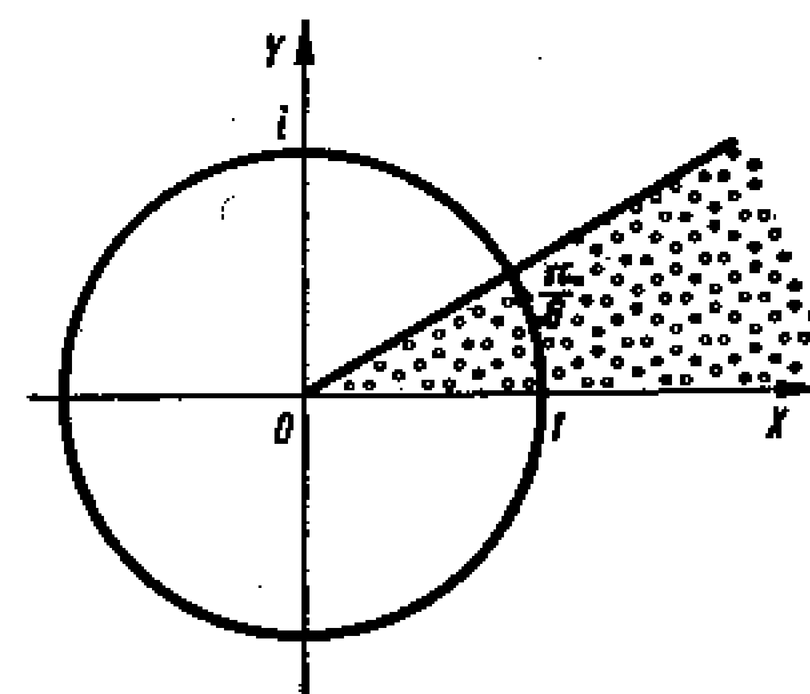
1) $r = 1$.

Time su određene točke kompleksne ravnine z, koje leže na jediničnoj kružnici sa središtem u O. Vidi sl. 11.

2) $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Točke leže na poluzraci koja izlazi iz ishodišta O pod kutom $\frac{\pi}{6}$ prema realnoj osi. Vidi sl. 11.

3) $0 < \arg z < \frac{\pi}{6}$.

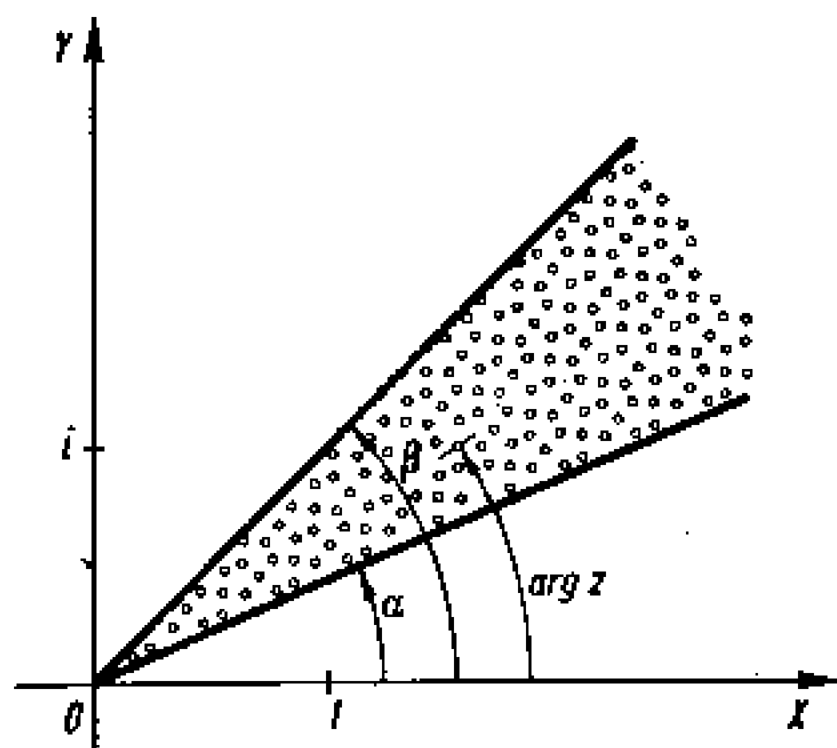


Slika 11.

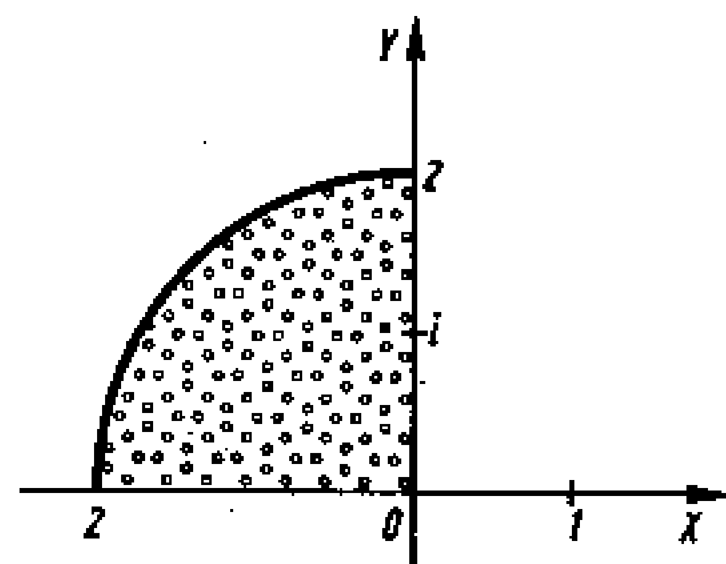
Točke leže *između* realne osi X i poluzrake $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Vidi sl. 11.

4) $\alpha = < \arg z < \beta$.

Točke leže na beskonačnom sektoru, koji je omeđen poluzrakama $\arg z_1 = \alpha$ i $\arg z_2 = \beta$, dok su same zrake isključene. Vidi sl. 12.



Slika 12.



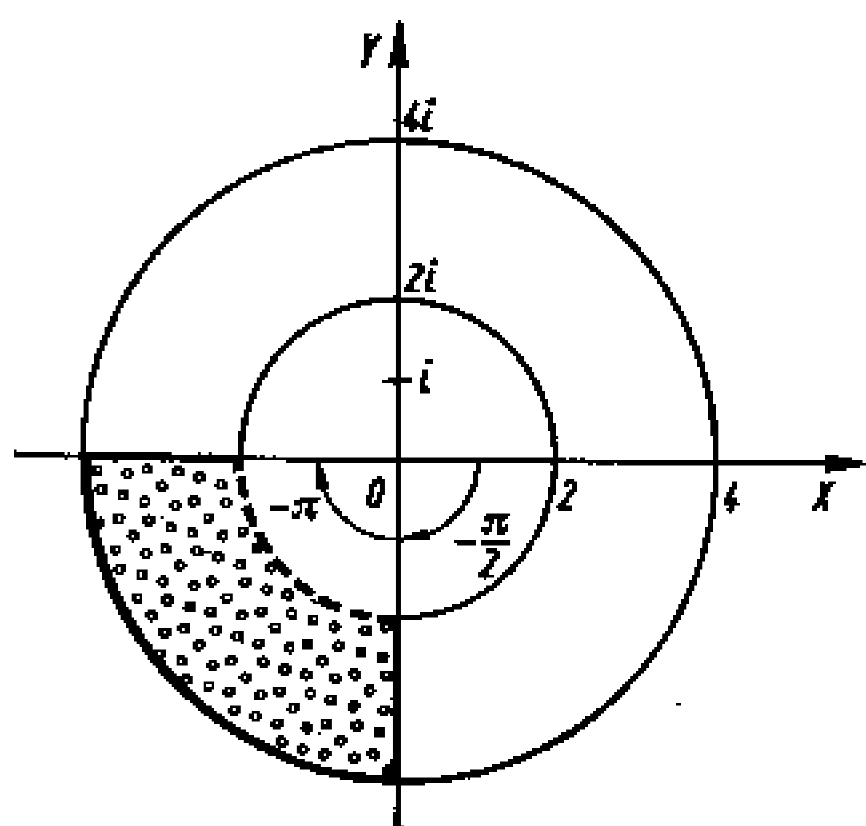
Slika 13.

5) $r = 2$ i $\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$.

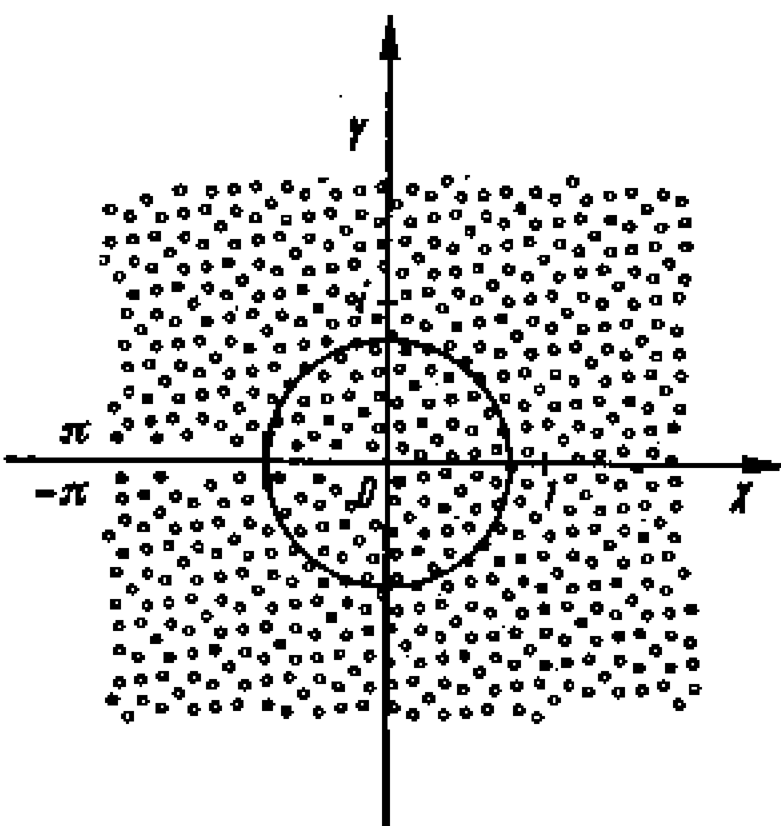
Točke leže u nutrini II kvadranta kruga polumjera 2. Vidi sl. 13.

6) $2 < r \leqslant 4$ i $-\pi < \arg z < -\frac{\pi}{2}$.

Točke leže u nutrini III kvadranta kružnog vijenca prikazanog na slici 14.



Slika 14.



Slika 15.

7) $-\pi < \arg z < \pi$.

Točke ispunjavaju čitavu ravninu z osim onih koje se nalaze na negativnom dijelu realne osi. Vidi sl. 15.

f. Eksponencijalni oblik kompleksnog broja

Pomoću I i II Eulerove formule*)

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

možemo kompleksni broj $z = x + iy$ prikazati još u eksponencijalnom obliku.

U tu svrhu zbrojima, a zatim oduzmemo te dvije formule pa dobivši na taj način

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{i} \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}.$$

Uvrstimo te vrijednosti u trigonometrijski oblik kompleksnog broja

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Dobivamo eksponencijalni oblik

$$z = r\, e^{i\varphi}. \tag{4}$$

Tu je, kako znamo, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, dok je $\varphi = \arg z = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$, odnosno $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arc\,tg}\frac{y}{x} = \varphi + 2k\pi$, pa je također

$$z = r \cdot e^{i(\varphi + 2k\pi)} \tag{4'}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Imali smo primjer:

$z = 3 + 4i$, pa smo dobili $r = 5$ i $\arg z = \operatorname{arc} 53{,}2° = 0{,}928$.

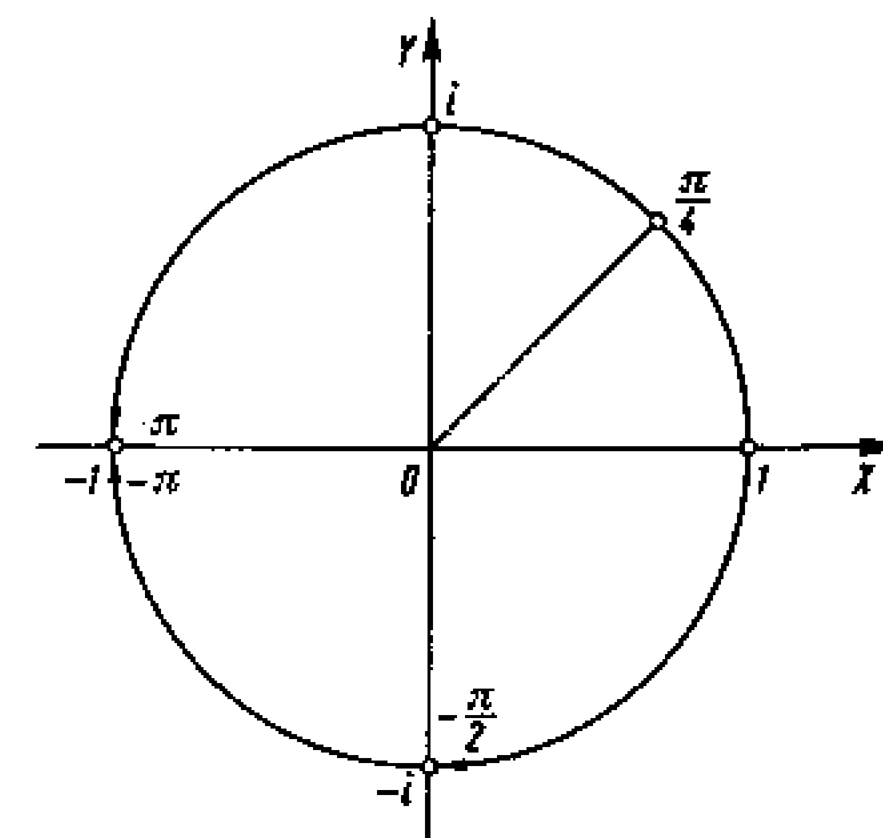
U eksponencijalnom obliku taj broj glasi:

$$z = 5\, e^{0{,}928\, i},$$

odnosno

$$z = 5\, e^{i(0{,}928 + 2k\pi)}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$



Slika 16.

Izrazimo u eksponencijalnom obliku brojeve $1, i, -1, -i$ prikazane na slici 16.

*) Vidi Repetitorij više Matematike I dio § 21.

Prema toj slici i formuli (4) dobivamo:

$z = 1$: $\quad r = 1,\ \varphi = \operatorname{Arg} z = 0 + 2\,k\,\pi$, pa je

$$1 = 1 \cdot e^{0+2k\pi i} = e^0 \cdot e^{2k\pi i} = e^{2k\pi i}, \quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots .$$

$$e^{2k\pi i} = 1. \tag{5}$$

$z = i$: $\quad r = 1$, $\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi.$

$$i = 1 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot e^{2k\pi i} = e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot 1 = e^{\frac{\pi}{2}i}.$$

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = i.$$

$z = -1$: $\quad r = 1$, $\operatorname{Arg} z = \pi + 2\,k\,\pi$

$$-1 = e^{i(\pi+2k\pi)} = e^{\pi i} \cdot e^{2k\pi i} = e^{\pi i} \cdot 1 = e^{\pi i}.$$

$$e^{\pi i} = -1.$$

$z = -i$: $\quad r = 1$; $\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$

$$-i = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}i} \cdot e^{2k\pi i} = e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

$$e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i.$$

ili $\operatorname{Arg} z = \frac{3}{2}\pi$:

$$-i = e^{i\left(\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right)} = e^{\frac{3}{2}\pi i}.$$

$$e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i.$$

Do istih rezultata dolazimo pomoću formule $z = r(\cos\pi + i\sin\pi)$:

$$e^{\pm 2\pi i} = 1, \text{ jer je } \cos(\pm 2\,\pi) + i\sin(\pm 2\,\pi) = 1,$$
$$e^{\pm \pi i} = -1, \text{ jer je } \cos(\pm\,\pi) + i\sin(\pm\,\pi) = -1,$$
$$e^{\pm\frac{\pi}{2}i} = \pm\, i, \text{ jer je } \cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm\, i.$$

Na isti način možemo pokazati da je

$$e^{\pm\frac{\pi}{4}i} = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}, \text{ jer je } \cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i).$$

Primjeri

1. ***Prikaži zadane kompleksne brojeve u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku,*** **a također grafički uzevši za argument glavnu vrijednost** $\arg z = \varphi$.

1) $z_1 = \sqrt{3} + i$; $z_2 = -\sqrt{3} + i$; $z_3 = \sqrt{3} - i$; $z_4 = -\sqrt{3} - i$. Za sve zadane z

$$r = \sqrt{3 + 1} = 2.$$

z_1 je u I kvadrantu: $\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{arc} 30° = \frac{\pi}{6}.$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \underline{2\,e^{\frac{\pi}{6}i}}.$$

z_2 je u II kvadrantu: $\varphi_2 = \pi - \varphi_0 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi.$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) = \underline{2\,e^{\frac{5}{6}\pi i}}.$$

z_3 je u IV kvadrantu: $\varphi_3 = -\varphi_0 = -\frac{\pi}{6}.$

$$z_3 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \underline{2\,e^{-\frac{\pi}{6}i}}.$$

z_4 je u III kvadrantu: $\varphi_4 = -\varphi_2 = -\frac{5}{6}\pi.$

$$z_4 = 2\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right] = \underline{2\,e^{-\frac{5}{6}\pi i}}.$$

2) $z = -2 + i.$

$$r = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}; \quad \varphi \text{ je u II kvadrantu: } \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{-2} = -0{,}5.$$

Pomoću tablica dobivamo: $\varphi = 180° - 26°34' = 153°26'.$

$$z = \sqrt{5}\,(\cos 153°26' + i\sin 153°26').$$

Pomoću tablica za lučnu mjeru kuta imamo:

$$\begin{array}{rl} \operatorname{arc} 153°26' = 2{,}67\,035 & \\ 0{,}00\,750 & \Big| + \doteq 2{,}678 \\ \hline 2{,}67\,785 & \end{array}$$

$$\underline{z = \sqrt{5}\,e^{2{,}678i}}.$$

3) $z = -1 - 2\,i.$

$$r = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}; \ \operatorname{tg}\varphi = \frac{-2}{-1} = 2 \quad (\varphi \text{ je u III kvadrantu}).$$

$$\varphi_0 \doteq 63°26'; \quad \varphi \doteq -(\pi - \varphi_0) = -116°34', \quad \operatorname{arc}\varphi \doteq -2{,}035.$$

$$z = \sqrt{5}\,[\cos(-2{,}035) + i\sin(-2{,}035)] = \underline{\sqrt{5}\,e^{-2{,}035i}}.$$

4) $z = 2 + \sqrt{3} + i.$

$$r = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4 + 4\sqrt{3} + 3 + 1} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}.$$

Da pojednostavimo taj rezultat, stavimo

$$\sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}\,\Big|^2$$

$8 + 4\sqrt{3} = a + 2\sqrt{ab} + b$, pa možemo uzeti: $a + b = 8$ i $\sqrt{ab} = 2\sqrt{3}$ ili $ab = 12$, pa je $a = \frac{12}{b}$. Uvrštenje u $a + b = 8$ daje kradratnu jednadžbu $b^2 - 8b + 12 = 0$, a odatle je $b = 6$ i $a = 2$.

Slijedi: $r = \sqrt{2} + \sqrt{6}$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2 - \sqrt{3},$$

pa je

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{1 - 4 + 4\sqrt{3} - 3} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Slijedi: $\operatorname{arc} 2\varphi = \frac{\pi}{6}$, pa je $\operatorname{arc}\varphi = \frac{\pi}{12}$.

$$z = (\sqrt{2} + \sqrt{6})\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \underline{3{,}863\, e^{\frac{\pi}{12}i}}.$$

5) $z = -5 + 12i.$ $[z = 13\, e^{1{,}967i}]$.

6) $z = 4 + 4i.$ $[4\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}]$.

7) $z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i.$ $[2\, e^{-\frac{3}{4}\pi i}]$.

8) $z = 4 - i.$ $[\sqrt{17}\, e^{-0{,}244i}]$.

9) $z = -3i.$ $[3\, e^{-\frac{\pi}{2}i}]$.

10) $z = 5.$ $[5\, e^{0\cdot i}]$.

11) $z = -5.$ $[5\, e^{\pi i}]$.

2. *Prikaži zadane brojeve u algebarskom obliku.*

1) $z = 6\, e^{\frac{\pi}{3}i}.$

$$z = 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{3(1 + i\sqrt{3})}.$$

2) $z = 17\, e^{5{,}306i}.$

Kako je $5{,}306 = \operatorname{arc}\varphi = \operatorname{arc} 304° = \operatorname{arc}(270° + 34°)$, imamo

$$z = 17(\sin 34° - i\cos 34°) = 17(0{,}559 - i\, 0{,}829) \doteq \underline{9{,}50 - 14{,}1\, i}.$$

3) $z = 10\,(\cos 207° + i\sin 207°).$ $[-8{,}91 - 4{,}54\, i]$.

4) $z = 20\, e^{\frac{\pi}{2}i}.$ $\left[20\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 20\, i\right]$.

5) $z = 2\, e^{\pi i}.$ $[-2]$.

6) $z = 4\, e^{-\frac{\pi}{2}i}.$ $[-4\, i]$.

§ 2. OPERACIJE S KOMPLEKSNIM BROJEVIMA

1. Zbrajanje i oduzimanje

Znamo već da je

$$z_1 + z_2 = (x_1 + i y_1) + (x_2 + i y_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

i

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 + i y_1) + (-x_2 - i y_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Za zbrajanje kompleksnih brojeva vrijede zakoni

komutacije $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

asocijacije $z_1 + z_2 + z_3 = (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$

Već smo pokazali da se zbrajanje i oduzimanje kompleksnih brojeva vrši po pravilu vektorskog zbrajanja i oduzimanja, ako kompleksne brojeve prikažemo u obliku vektora. Vidi na str. 15 sl. 3.

2. Množenje

Kompleksni brojevi zadani u algebarskom obliku množe se kao binomi pri čemu se uzima da je $i^2 = -1$.

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i y_1)\cdot(x_2 + i y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Za množenje kompleksnih brojeva vrijede zakoni

komutacije $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$,

asocijacije $(z_1 \cdot z_2)\cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$,

distribucije $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)\cdot(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2,$$

tj. umnožak uzajamno konjugirano kompleksnih brojeva jednak je kvadratu njihove apsolutne vrijednosti (modula).

Prikažemo li kompleksne brojeve u trigonometrijskom obliku

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{i} \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

dobit ćemo

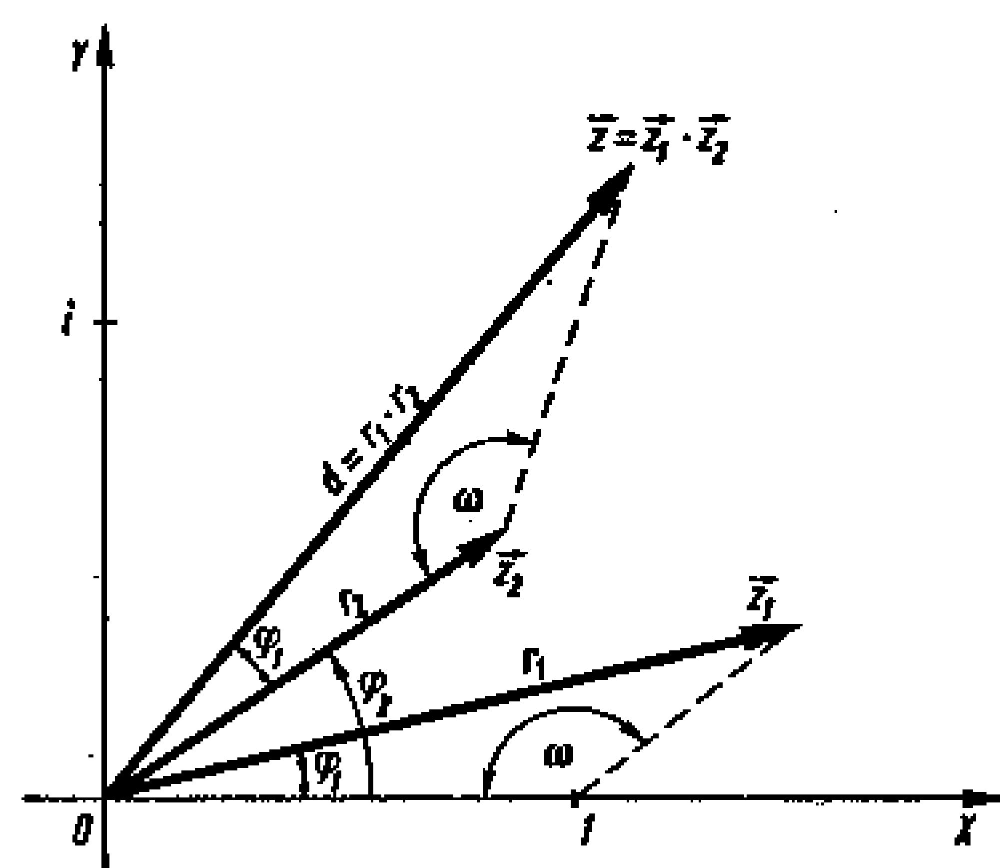
$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\,[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] = r_1 r_2\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \qquad (6)$$

Vidimo: $\quad \text{mod}(z_1 \cdot z_2) = r_1 \cdot r_2 = \text{mod}\, z_1 \cdot \text{mod}\, z_2,$

tj. modul produkta jednak je *produktu* modula faktora, i

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2,$$

tj. argument produkta jednak je *zbroju* argumenata faktora.



Slika 17.

Na slici 17 prikazan je taj produkt grafički tako da su faktorima z_1 i z_2 dodijeljeni vektori $\mathbf{z}_1$ i $\mathbf{z}_2$. Iz sličnosti trokuta slijedi: $r_1 : d = 1 : r_2$, pa je $d = r_1 \cdot r_2$.

Formula (6) vrijedi i za n faktora:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdots z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdots r_n\, [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) + \\ + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n)]. \tag{6'}$$

3. Dijeljenje

Kvocijent dvaju kompleksnih brojeva

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + i y_1}{x_2 + i y_2}, \quad z_2 \neq 0$$

određuje se tako da se brojnik i nazivnik pomnože s brojem koji je konjugiran s obzirom na nazivnik:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + i y_1)(x_2 - i y_2)}{(x_2 + i y_2)(x_2 - i y_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i (x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Prikažemo li z_1 i z_2 u *trigonometrijskom obliku*

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) \quad \text{i} \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2),$$

dobit ćemo postupajući na isti način:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\, \frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \tag{7}$$

Vidimo, da je $\text{mod}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\text{mod}(z_1)}{\text{mod}(z_2)}$ i

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \varphi_1 - \varphi_2 = \arg z_1 - \arg z_2,$$

tj. modul kvocijenta dvaju kompleksnih brojeva jednak je *kvocijentu* njihovih modula, dok je argument kvocijenta jednak *razlici* argumenata dividenda i divizora.

Prikažemo li kompleksne brojeve u *eksponencijalnom* obliku

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \quad \text{i} \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2},$$

dolazimo još brže do istog rezultata

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \tag{8}$$

Primjeri

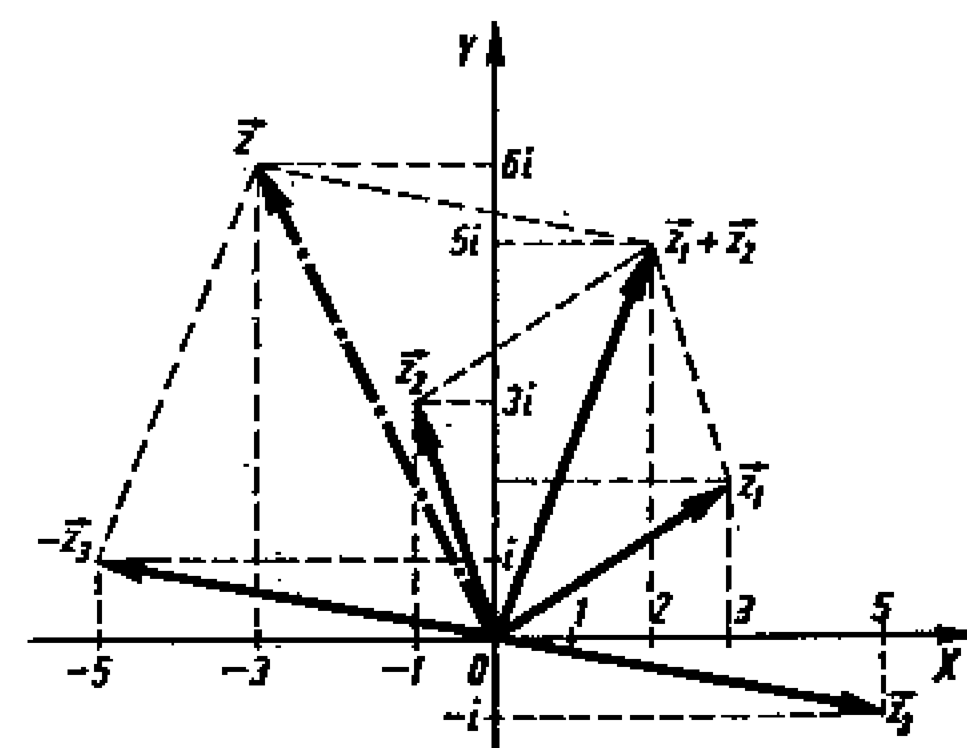
1. Odredi računski i grafički.

1) $z = z_1 + z_2 - z_3$,

ako je $z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = -1 + 3i$, $z_3 = 5 - i$.

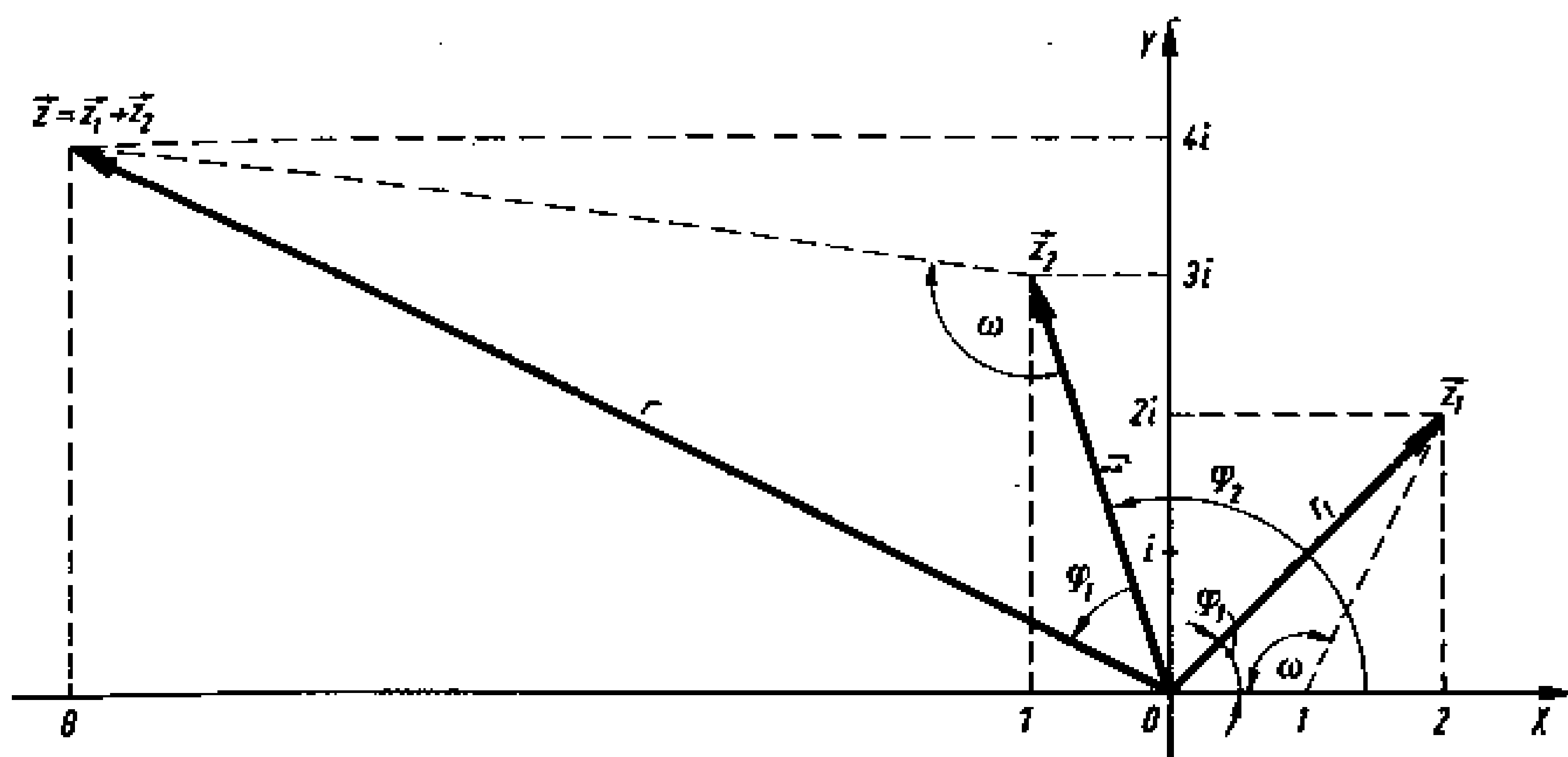
$z = (3 + 2i) + (-1 + 3i) - (5 - i) =$
$= \underline{-3 + 6i}.$

Grafički: vidi sl. 18.



Slika 18.

2) $z = z_1 \cdot z_2$,



Slika 19.

ako je $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -1 + 3i$.

$$z = z_1 \cdot z_2 = (2 + 2i)(-1 + 3i) = (-2 - 6) + i(-2 + 6) = \underline{-8 + 4i}.$$

Grafički: vidi sl. 19.

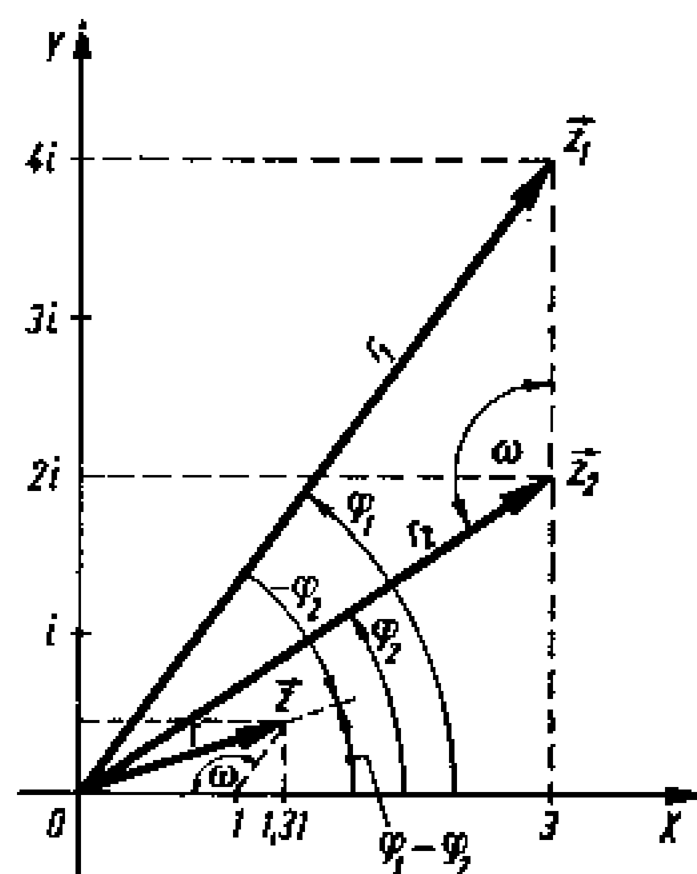
3) $z = \dfrac{z_1}{z_2}$,

ako je $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 3 + 2i$.

$$z = \frac{(3 + 4i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{(9 + 8) + i(12 - 6)}{9 + 4} =$$

$$= \frac{17 + 6i}{13} = \underline{1{,}31 + i\,0{,}46}.$$

Grafički: vidi sl. 20, u kojoj je $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ i $r = \dfrac{r_1}{r_2}$ [slijedi iz sličnosti trokuta: $r_1 : r = r_2 : 1$].



Slika 20.

. Dokaži identitet

$$x^4 + 4 = (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 + i)(x + 1 - i).$$

Kako je $[(x - 1) - i][(x - 1) + i] = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2 = (x^2 + 2) - 2x$,

a $[(x + 1) + i][(x + 1) - i] = (x + 1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2) + 2x$,

desna strana zadanog identiteta prima oblik:

$$[(x^2 + 2) - 2x][(x^2 + 2) + 2x] = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 =$$

$$= \underline{x^2 + 4}.$$

3. Izračunaj

1) $\dfrac{1}{i}$.

$$\frac{1}{i} = \frac{-i}{i(-i)} = \frac{-i}{1} = \underline{-i}.$$

2) $\dfrac{1 - i}{1 + i}$. [$-i$].

3) $z = \dfrac{(\cos 77° + i \sin 77°)(\cos 23° + i \sin 23°)}{\cos 55° + i \sin 55°}$.

Prelazimo na eksponencijalni oblik zadanih kompleksnih brojeva:

$$z = \frac{e^{i\,\text{arc}\,77°} \cdot e^{i\,\text{arc}\,23°}}{e^{i\,\text{arc}\,55°}} = \frac{e^{i\,\text{arc}\,100°}}{e^{i\,\text{arc}\,55°}} = e^{i\,\text{arc}\,45°} = \cos 45° + i \sin 45° = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)}.$$

4) $\dfrac{(3 - 4i)(-24 - 10i)}{1 + 3i} + \dfrac{10 + 7i}{5i}$. [$10 + 38{,}2\,i$].

4. Prikaži zadane brojeve

$$z_1 = 1 + i;\quad z_2 = \sqrt{3} + i;\quad z_3 = 1 + i\sqrt{3}$$

u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku i izračunaj $z = \dfrac{z_1}{z_2 \cdot z_3}$.

z_1: $r_1 = \sqrt{2}$, $\varphi_1 = \text{arc tg}\,\dfrac{1}{1} = \dfrac{\pi}{4}$; $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \underline{\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}}$.

z_2: $r_2 = 2$, $\varphi_2 = \text{arc tg}\,\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \text{arc tg}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{6}$; $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i \sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \underline{2 e^{\frac{\pi}{6}i}}$.

z_3: $r_3 = 2$, $\varphi_3 = \text{arc tg}\,\dfrac{\sqrt{3}}{1} = \dfrac{\pi}{3}$; $z_3 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i \sin\dfrac{\pi}{3}\right) = \underline{2 e^{\frac{\pi}{3}i}}$.

$$z = \frac{z_1}{z_2 \cdot z_3} = \frac{\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}}{2 e^{\frac{\pi}{6}i} \cdot 2 e^{\frac{\pi}{3}i}} = \frac{\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}}{4 e^{\frac{\pi}{2}i}} = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-\frac{\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{\frac{1}{4}(1 - i)}.$$

5. Pojednostavi $\dfrac{\cos\varphi + i \sin\varphi}{\cos\psi - i \sin\psi}$.

$$\frac{\cos\varphi + i \sin\varphi}{\cos\psi - i \sin\psi} = \frac{(\cos\varphi + i \sin\varphi)(\cos\psi + i \sin\psi)}{(\cos\psi - i \sin\psi)(\cos\psi + i \sin\psi)} =$$

$$= \frac{(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)}{\cos^2\psi + \sin^2\psi} = \underline{\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)}.$$

6. Pokaži da je

$$\frac{(1 - i\sqrt{3})(\cos\varphi + i \sin\varphi)}{2(1 - i)(\cos\varphi - i \sin\varphi)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{12}\right)\right].$$

4. Potenciranje

Potenciranje (na cijeli pozitivni eksponent). *Moivreove formule i njihova primjena.*

Uz pretpostavku da je n prirodan broj dobivamo prema binomnom poučku*)

$$(x + i\,y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\, i\,y + \binom{n}{2} x^{n-2} (i\,y)^2 + \binom{n}{3} x^{n-3} (i\,y)^3 + \cdots$$
$$\cdots + \binom{n}{1} x\,(i\,y)^{n-1} + (i\,y)^n,$$

pri čemu uzimamo u obzir da i^s ima period 4, pa je

$$i^s = i^{4n+m} = i^{4n} \cdot i^m = i^m.$$

Primjeri

1. $(x + i\,y)^4 = x^4 + \frac{4}{1} x^3\, i\,y + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} x^2 (i\,y)^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x\,(i\,y)^3 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (i\,y)^4 =$

$= x^4 + i\,4\,x^3 y - 6\,x^2 y^2 - i\,4\,x\,y^3 + y^4 = (x^4 - 6\,x^2 y^2 + y^4) + i\,(4\,x^3 y - 4\,x\,y^3).$

2. $(1 + 2\,i)^6 = 1 + 6 \cdot 1 \cdot (2i) + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 1 \cdot (2\,i)^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1 \cdot (2\,i)^3 + 15 \cdot 1 \cdot (2\,i)^4 +$

$+ 6 \cdot 1 \cdot (2\,i)^5 + 1 \cdot (2\,i)^6 = 1 + 12\,i - 60 - 160\,i + 240 + 192\,i - 64 = \underline{117 + 44\,i}.$

3. $\left(\frac{i^5 + 2}{i^{19} + 1}\right)^2 = \left(\frac{i + 2}{i^3 + 1}\right)^2 = \left(\frac{i + 2}{-i + 1}\right)^2 = \frac{-1 + 4\,i + 4}{-1 - 2\,i + 1} = \frac{3 + 4\,i}{-2\,i} = \frac{(3 + 4\,i)\,i}{-2\,i \cdot i} =$

$= \frac{3\,i - 4}{2} = \underline{-2 + \frac{3}{2}\,i}.$

4. $\frac{(1 + i)^5}{(1 - i)^3} = \frac{1 + 5\,i - 10 - 10\,i + 5 + i}{1 - 3\,i - 3 + i} = \frac{-4 - 4\,i}{-2 - 2\,i} = 2\,\frac{2 + 2\,i}{2 + 2\,i} = \underline{2}.$

5. $\left(\frac{1 + i}{\sqrt{2}}\right)^{224} = \left[\left(\frac{1 + i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{112} = \left(\frac{1 + 2\,i - 1}{2}\right)^{112} = i^{112} = (i^4)^{28} = 1^{28} = \underline{1}.$

6. $(1 + i)^{25}$.

$(1 + i)^{25} = (1 + i)^{24} \cdot (1 + i).$ (a)

$(1 + i)^2 = 1 + 2\,i - 1 = 2\,i;\quad (1 + i)^4 = (2\,i)^2 = -2^2;$

$(1 + i)^{24} = [(1 + i)^4]^6 = (-2^2)^6 = 2^{12}.$

Prema (a): $(1 + i)^{25} = \underline{2^{12} \cdot (1 + i)}.$

7. $\left(\frac{1 - 2\,i}{2}\right)^4.$ $[-7 + 24\,i].$

8. $(2 + i\sqrt{12})^6.$ $[-27].$

*) Vidi od istog autora: Repetitorij elementarne matematike, I, § 10.

Imali smo formulu (6)'

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) +$$
$$+ i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n)].$$

Pretpostavimo li da je

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z, \quad r_1 = r_2 = \cdots = r_n = r \quad \text{i} \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_n = \varphi,$$

dobit ćemo:

$$z^n = r^n (\cos n\,\varphi + i \sin n\,\varphi).$$

Uz $r = 1$, tj. za $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$, dobivamo

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\,\varphi + i \sin n\,\varphi.$$

Uvrštenje $-\varphi$ mjesto φ daje

$$(\cos\varphi - i \sin\varphi)^n = \cos n\,\varphi - i \sin n\,\varphi. \qquad (9)$$

To su I i II Moivreove formule.

Do II Moivreove formule možemo doći i drugim putem:

Ako je $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$, tada je

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\cos\varphi + i \sin\varphi} = \frac{\cos\varphi - i \sin\varphi}{(\cos\varphi + i \sin\varphi)(\cos\varphi - i \sin\varphi)} =$$
$$= \frac{\cos\varphi - i \sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \cos\varphi - i \sin\varphi.$$

Odatle slijedi:

$$z + \frac{1}{z} = \cos\varphi + i \sin\varphi + \cos\varphi - i \sin\varphi = \underline{2 \cos\varphi}.$$

Kako je $z^n = \cos n\,\varphi + i \sin n\,\varphi$, a

$$\frac{1}{z^n} = (\cos\varphi - i \sin\varphi)^n = \frac{1}{(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n},$$

dobivamo

$$z^n + \frac{1}{z^n} = \cos n\,\varphi + i \sin n\,\varphi + \cos n\,\varphi - i \sin n\,\varphi = \underline{2 \cos n\,\varphi}.$$

Prikažemo li kompleksni broj u eksponencijalnom obliku, imat ćemo:

$$z^n = r^n (\cos n\,\varphi + i \sin n\,\varphi) = r^n e^{i\varphi n}. \qquad (10)$$

Primjeri

1. $(\cos 2° + i \sin 2°)^{45} = (e^{i \operatorname{arc} 2°})^{45} = e^{i \operatorname{arc} 90°} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = \underline{i}.$

2. Malo prije izračunali smo $(1 + 2i)^6$ pomoću binomnog poučka. Riješimo isti zadatak izvršivši prijelaz na trigonometrijski oblik:

$$1 + 2i = [r = \sqrt{5};\ \varphi = \operatorname{arc tg} 2 \doteq \operatorname{arc} 63{,}5°] = \sqrt{5}(\cos 63{,}5° + i \sin 63{,}5°).$$

$$(1 + 2i)^6 = 125(\cos 381° + i \sin 381°) = 125(\cos 21° + i \sin 21°) =$$
$$= 125(0{,}934 + i\,0{,}388) \doteq \underline{117 + i\,44}.$$

3. $(1 + i)^{16} = \left[r = \sqrt{2};\ \varphi = \operatorname{arc tg} 1 = \frac{\pi}{4}\right] = (\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}})^{16} = 256\, e^{4\pi i} =$
$$= 256(\cos 4\pi + i \sin 4\pi) = \underline{256}.$$

4. $z = (1 + i)^8 (1 - i\sqrt{3})^{-6}.$

Prema primjeru 3.: $(1 + i)^8 = (\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}})^8 = 2^4 \cdot e^{2\pi i} = 2^4.$

$$(1 - i\sqrt{3})^{-6} = \frac{1}{(1 - i\sqrt{3})^6} = \left[r = 2;\ \varphi = \operatorname{arc tg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3}\right] =$$
$$= \frac{1}{(2 \cdot e^{-\frac{\pi}{3}i})^6} = \frac{1}{2^6 e^{-2\pi i}}.$$

$$z = \frac{2^4}{2^6 \cdot e^{-2\pi i}} = \frac{e^{2\pi i}}{4} = \underline{\frac{1}{4}}.$$

5. **Izračunaj:**

1) $(1 + i)^{10}.$ $[32\,i].$

2) $(1 + i)^{-2}.$ $\left[-\frac{i}{2}\right].$

3) $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^9$ $[-1].$

4) $(2 + i\sqrt{12})^6$ $[-27].$

5) $\frac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{20}} + \frac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{20}}.$ $[-64].$

6. Pokaži da je

1) $(1 + i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4}\right).$

2) $(\sqrt{3} - i)^n = 2^n\left(\cos \frac{n\pi}{6} - i \sin \frac{n\pi}{6}\right).$

7. **Izračunaj:**

1) $\left(1 + \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^4.$

$$\left(1 + \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^4 = \left(1 + e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 1 + 4e^{i\frac{\pi}{4}} + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} e^{i\frac{\pi}{2}} + 4e^{i\frac{3}{4}\pi} + e^{i\pi} =$$
$$= 1 + 4\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) + 6\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) +$$
$$+ 4\left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi\right) + (\cos \pi + i \sin \pi) =$$
$$= 1 + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 6i + 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1 =$$
$$= i\,4\sqrt{2} + 6i = \underline{2(3 + 2\sqrt{2})\,i}.$$

2) $\left(1 + \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^6.$ $[-27].$

3) $(1 + \cos 20° + i \sin 20°)^3.$ $[z = 2 \cos 10° (\cos 10° + i \sin 10);\ z^3 = 2 \cos 10°].$

8. Pokaži da je

$$(1 + i\sqrt{3})(1 + i)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7}{12}\pi + \varphi\right) + i \sin\left(\frac{7}{12}\pi + \varphi\right)\right].$$

Uputa: sva tri faktora prikaži u eksponencijalnom obliku.

9. Izračunaj $\omega_1^n + \omega_2^n$, gdje je n cio broj, dok su

$\omega_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\omega_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$ $\left[2 \cos\left(\frac{2}{3}n\pi\right)\right].$

10. Pokaži da je

$$\left(\frac{1 + i \operatorname{tg} \varphi}{1 - i \operatorname{tg} \varphi}\right)^n = \frac{1 + i \operatorname{tg}(n\varphi)}{1 - i \operatorname{tg}(n\varphi)}.$$

Uputa: Izrazi $\operatorname{tg} \varphi$ u obliku $\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}.$

Pomoću Moivreovih formula možemo izraziti

1) $\cos n\varphi$ i $\sin n\varphi$, dakle i $\operatorname{tg} n\varphi$ pomoću potencija funkcija $\cos \varphi$ i $\sin \varphi$,
2) $\cos^n \varphi$ u obliku polinoma 1. stupnja u $\cos \varphi, \ldots, \cos n\varphi$ i $\sin^n \varphi$ u $\sin \varphi, \ldots, \sin n\varphi$.

Ad 1) Postupak pokažimo na primjerima.

Primjeri

1. Izrazi funkcije $\cos 5\varphi$ i $\sin 5\varphi$ pomoću potencija funkcija $\cos \varphi$ i $\sin \varphi$.

$$\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi = (e^{i\varphi})^5 = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^5 = \cos^5 \varphi + \binom{5}{1}\cos^4 \varphi\, i \sin \varphi +$$
$$+ \binom{5}{2}\cos^3 \varphi\, i^2 \sin^2 \varphi + \binom{5}{2}\cos^2 \varphi\, i^3 \sin^3 \varphi + \binom{5}{1}\cos \varphi\, i^4 \sin^4 \varphi + i^5 \sin^5 \varphi =$$
$$= \left(\cos^5 \varphi - \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}\cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi\right) +$$
$$+ i\left(5 \cos^4 \varphi \sin \varphi - \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}\cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi\right).$$

Iz jednakosti kompleksnih brojeva slijedi:

$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi.$$

$$\sin 5\varphi = \sin^5\varphi - 10\sin^3\varphi\cos^2\varphi + 5\sin\varphi\cos^4\varphi.$$

2. Izrazi $\operatorname{tg} 6\varphi$ s $\operatorname{tg}\varphi$.

$$\operatorname{tg} 6\varphi = \frac{\sin 6\varphi}{\cos 6\varphi}.$$

Postupamo na isti način kao u primjeru 1., pri čemu odmah uzimamo u obzir, da su parne potencije imaginarne jedinice i realne, a neparne imaginarne.

Dobivamo prema $\cos 6\varphi + i\sin 6\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^6$:

$$\sin 6\varphi = \binom{6}{1}\cos^5\varphi\sin\varphi - \binom{6}{3}\cos^3\varphi\sin^3\varphi + \binom{6}{5}\cos\varphi\sin^5\varphi =$$
$$= 6\cos^5\varphi\sin\varphi - 20\cos^3\varphi\sin^3\varphi + 6\cos\varphi\sin^5\varphi.$$

$$\cos 6\varphi = \cos^6\varphi - \binom{6}{2}\cos^4\varphi\sin^2\varphi + \binom{6}{4}\cos^2\varphi\sin^4\varphi - \sin\varphi =$$
$$= \cos^6\varphi - 15\cos^4\varphi\sin^2\varphi + 15\cos^2\varphi\sin^4\varphi - \sin^6\varphi.$$

$$\operatorname{tg} 6\varphi = \frac{\sin 6\varphi}{\cos 6\varphi} = [\text{brojnik i nazivnik podijelimo s } \cos^6\varphi] = \frac{2(3\operatorname{tg}\varphi - 10\operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{tg}^5\varphi)}{1 - 15\operatorname{tg}^2\varphi + 15\operatorname{tg}^4\varphi - \operatorname{tg}^6\varphi}.$$

3. Izrazi $\cos 8x$ i $\sin 7x$ pomoću potencija $\cos x$ i $\sin x$.

$$\left[\begin{aligned}&\cos 8x = \cos^8 x - 28\cos^6 x\sin^2 x + 70\cos^4 x\sin^4 x - 28\cos^6 x\sin^2 x + \sin^8 x;\\ &\sin 7x = 7\cos^6 x\sin x - 35\cos^4 x\sin^3 x + 21\cos^2 x\sin^5 x - \sin^7 x\end{aligned}\right].$$

Ad 2) Neka je $\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi$, tada je $\alpha^{-1} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ $\Big|^n \pm$

$$\alpha^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \quad \alpha^{-n} = \cos n\varphi - i\sin n\varphi \quad \Big| \pm$$

tada je

$$\cos\varphi = \frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2} \quad \text{i} \quad \sin\varphi = \frac{\alpha - \alpha^{-1}}{2i} \tag{a}$$

dok je

$$\cos n\varphi = \frac{\alpha^n + \alpha^{-n}}{2} \quad \text{i} \quad \sin n\varphi = \frac{\alpha^n - \alpha^{-n}}{2i} \quad \text{pa je} \quad 2\cos n\varphi = \alpha^n + \alpha^{-n}, \quad 2i\sin n\varphi = \alpha^n - \alpha^{-n}. \tag{b}$$

Primjeri

Prikaži zadane potencije trigonometrijskih funkcija argumenta φ u obliku trigonometrijskih polinoma mnogokratnika φ.

1. $\sin^3\varphi$.

$$\sin^3\varphi = [\text{prema (a)}] = \left(\frac{\alpha - \alpha^{-1}}{2i}\right)^3 = \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2\alpha^{-1} + 3\alpha\alpha^{-2} - \alpha^{-3}}{-8i} =$$
$$= \frac{\alpha^3 - 3\alpha + 3\alpha^{-1} - \alpha^{-3}}{-8i} = \frac{(\alpha^3 - \alpha^{-3}) - 3(\alpha - \alpha^{-1})}{-8i} = [\text{prema (b)}] =$$
$$= \frac{2i\sin 3\varphi - 3\cdot 2i\sin\varphi}{-8i} = \frac{\sin 3\varphi - 3\sin\varphi}{-4} = \frac{3\sin\varphi - \sin 3\varphi}{4}.$$

2. $\cos^4\varphi$.

$$\cos^4\varphi = [\text{prema (a)}] = \left(\frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}(\alpha^4 + 4\alpha^3\alpha^{-1} + 6\alpha^2\alpha^{-2} + 4\alpha\alpha^{-3} + \alpha^{-4}) =$$
$$= \frac{1}{16}(\alpha^4 + 4\alpha^2 + 6 + 4\alpha^{-2} + \alpha^{-4}) = \frac{1}{16}[(\alpha^4 + \alpha^{-4}) + 4(\alpha^2 + \alpha^{-2}) + 6] =$$
$$= [\text{prema (b)}] = \frac{1}{16}(2\cos 4\varphi + 8\cos 2\varphi + 6) = \frac{\cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi + 3}{8}.$$

3. $\sin^4\varphi$. $\left[\frac{1}{8}(\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + 3)\right]$.

4. $\cos^5\varphi$. $\left[\frac{1}{16}(\cos 5\varphi + 5\cos 3\varphi + 10\cos\varphi)\right]$.

5. $\cos^6\varphi$. $\left[\frac{1}{32}(\cos 6\varphi + 6\cos 4\varphi + 15\cos 2\varphi + 10)\right]$.

5. Korjenovanje

a. Eksponent radikanda z je $\frac{1}{n}$.

Tražimo izraz za $\sqrt[n]{z}$, gdje je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, dok je n cijeli pozitivni broj.

Pretpostavimo da je $\sqrt[n]{z}$ neki kompleksni broj $\varrho(\cos\psi + i\sin\psi)$, tj.

$$\sqrt[n]{z} = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi). \tag{a}$$

ϱ i ψ odredimo tako, da jednakost (a) dignemo na n-tu potenciju.

Dobivamo:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \varrho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$

Iz jednakosti kompleksnih brojeva slijedi:

$$\varrho^n = r, \quad \text{pa je} \quad \varrho = \sqrt[n]{r}$$

i $n\psi = \varphi + 2k\pi$, pa je $\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$, gdje je $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Uvrštenje u (a) daje:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \tag{11}$$

gdje za k uzimamo samo n vrijednosti i to $k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$. Formula (11) kazuje da svaka od n vrijednosti $\sqrt[n]{z}$ ima isti modul $\sqrt[n]{r}$, dok je argument prve vrijednosti $\frac{\varphi}{n}$, a povećava se svaki put za $\frac{2\pi}{n}$ pri povećanju k za jedinicu.

Odatle slijedi da $\sqrt[n]{z}$ za bilo koji broj $z \neq 0$ ima n različitih vrijednosti, koje leže u vrhovima pravilnog n-terokuta upisanog u kružnicu polumjera $\sqrt[n]{r}$ sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava.

Iz gore navedenog slijedi, da su zbrajanje, oduzimanje i potenciranje na cijeli stupanj jednoznačne operacije, dok vađenje korijena n-tog stupnja, gdje je n cio broj, daje uvijek n različitih vrijednosti.

Primjeri

Izračunaj i prikaži grafički

1. $\omega = \sqrt[6]{z}$, gdje je $z = -6 + i\,6\sqrt{3}$.

Prelazimo na trigonometrijski oblik radikanda z:

$$r = \sqrt{36 + 36 \cdot 3} = \sqrt{36 \cdot 4} = 6 \cdot 2 = 12.$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg} \frac{6\sqrt{3}}{6} = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}; \text{ za II kvadrant } \varphi = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi = \operatorname{arc} 120°,$$

pa je

$$z_0 = 12\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = 12(\cos 120° + i\sin 120°).$$

Prema (11):

$$\omega = \sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{12}\left(\cos\frac{120° + 360° \cdot k}{6} + i\sin\frac{120° + 360° \cdot k}{6}\right) =$$

$$= 1{,}51\,[\cos(20° + 60° \cdot k) + i\sin(20° + 60° \cdot k)] \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$k = 0$: $\omega_1 = 1{,}51(\cos 20° + i\sin 20°) = 1{,}51(0{,}94 + i\,0{,}34) \doteq \underline{1{,}41 + i\,0{,}51}.$

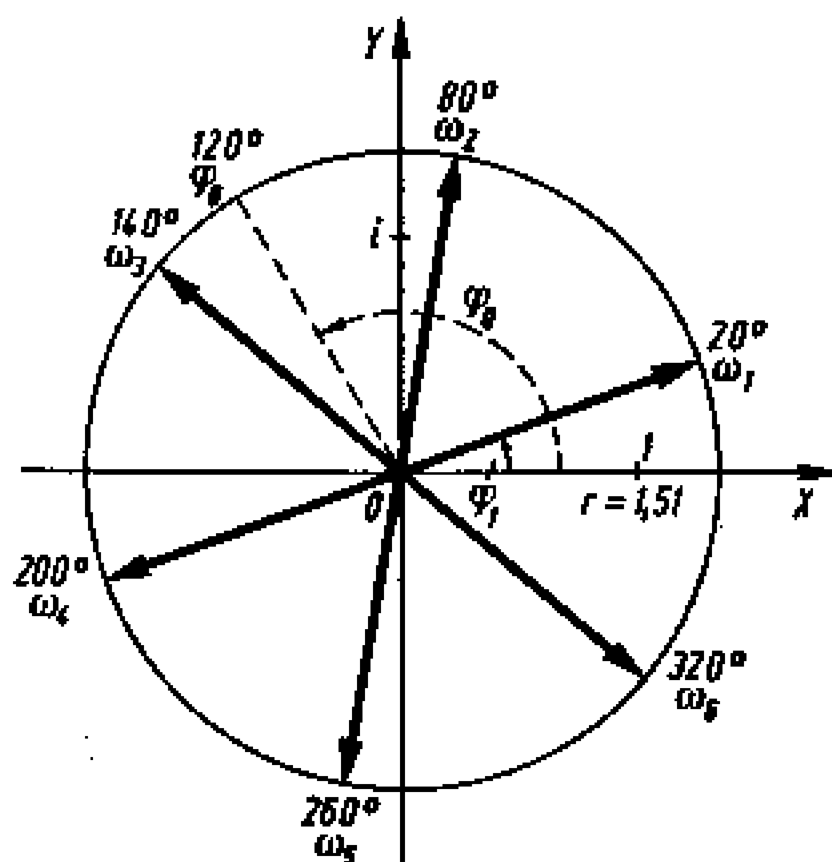
$k = 1$: $\omega_2 = 1{,}51(\cos 80° + i\sin 80°) = 1{,}51(0{,}17 + i\,0{,}98) \doteq \underline{0{,}26 + i\,1{,}47}.$

$k = 2$: $\omega_3 = 1{,}51(\cos 140° + i\sin 140°) = 1{,}51(-0{,}77 + i\,0{,}64) \doteq \underline{-1{,}15 + i\,0{,}97}.$

$k = 3$: $\omega_4 = 1{,}51(\cos 200° + i\sin 200°) = 1{,}51(-0{,}94 - i\,0{,}34) \doteq \underline{-1{,}41 - i\,0{,}51}.$

$k = 4$: $\omega_5 = 1{,}51(\cos 260° + i\sin 260°) = 1{,}51(-0{,}17 - i\,0{,}98) \doteq \underline{-0{,}26 - i\,1{,}47}.$

$k = 5$: $\omega_6 = 1{,}51(\cos 320° + i\sin 320°) = 1{,}51(0{,}77 - i\,0{,}64) \doteq \underline{1{,}15 - i\,0{,}97}.$



Slika 21.

Idemo li dalje pa uzmemo da je $k = 6$, dobit ćemo

$$\omega_7 = 1{,}51(\cos 380° + i\sin 380°) =$$
$$= 1{,}51(\cos 20° + i\sin 20°) = \omega_1.$$

Vidimo da se vrijednosti $\sqrt[6]{z}$ ponavljaju.

Budući da je stupanj korijena paran (6),

$$\omega_1 \text{ i } \omega_4, \quad \omega_2 \text{ i } \omega_5, \quad \omega_3 \text{ i } \omega_6$$

čine tri para kompleksnih brojeva, koji leže simetrično s obzirom na ishodište O.

Vidi sl. 21.

2. $\omega = \sqrt[3]{8 + i}$.

$$\left[\omega = \sqrt[3]{8{,}06}\left(\cos\frac{7°10' + 360° \cdot k}{3} + i\sin\frac{7°10' + 360° \cdot k}{3}\right) \text{ uz } k = 0, 1, 2. \right.$$
$$\left. \omega_1 \doteq 2{,}00 + i\,0{,}08; \quad \omega_2 \doteq -1{,}08 + i\,1{,}70; \quad \omega_3 \doteq -0{,}92 - i\,1{,}78\right].$$

3. $\omega = \sqrt{8 - 6i}$.

Taj zadatak riješi na dva načina: prema formuli (11), a zatim pomoću supstitucije $\sqrt{8 - 6i} = x + iy$.

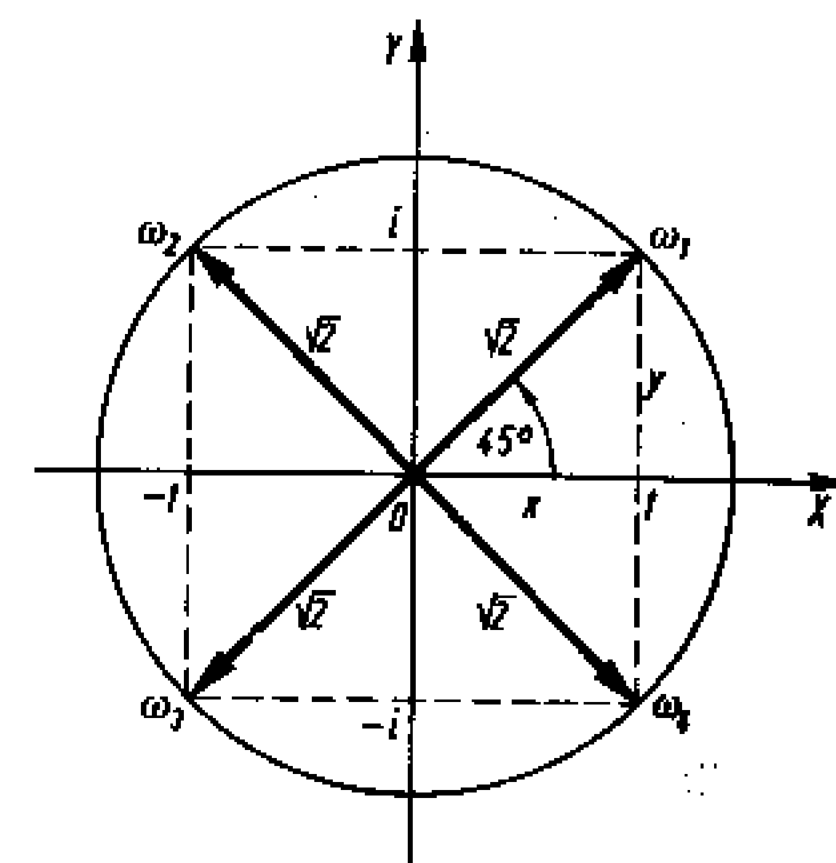
$[\omega_1 = -3 + i, \ \omega_2 = 3 - i]$.

4. Na isti način izračunaj

a) $\sqrt{1 + i}$. $\quad [\pm(1{,}11 + i\,0{,}456)]$.

b) $\sqrt{2 - i\,2\sqrt{3}}$. $\quad [\pm(\sqrt{3} - i)]$.

5. $\omega = \sqrt[4]{-4}$.



Slika 22.

Taj zadatak riješimo tako da numerički odredimo samo ω_1, a zatim prema slici očitamo vrijednosti ω_2, ω_3 i ω_4.

$$z = -4; \quad r = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \doteq 1{,}42; \text{ prema slici 22: } \varphi_0 = \pi.$$

$$\omega = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right]$$

$$k = 0, 1, 2, 3.$$

Za $k = 0$:

$$\omega_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{1 + i}.$$

Rišemo ω_1, ω_2, ω_3 i ω_4 i očitavamo te vrijednosti prema slici 22.

$$\omega_2 = \underline{-1 + i}; \quad \omega_3 = \underline{-1 - i}; \quad \omega_4 = \underline{1 - i}.$$

6. Na isti način odredi $\omega = \sqrt[6]{-27}$. $\quad \left[\pm i\sqrt{3}; \ \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}; \ \frac{-3 \mp i\sqrt{2}}{2}\right]$.

Primjena formule (11) na rješavanje binomnih jednadžbi. Pomoću formule (11) za računanje vrijednosti $\sqrt[n]{z}$ rješavaju se binomne jednadžbe.

Primjeri

Riješi uz grafički prikaz zadane binomne jednadžbe.

1. $x^5 + 32\,i = 0.$

Kako je $x = \sqrt[5]{-32\,i}$, prikažemo broj $-i$ u trigonometrijskom obliku uzevši u obzir da je $x^5 = -32\,i = 32 \cdot (-i)$:

$$-i = \cos(-90°) + i \sin(-90°),$$

pa je

$$x^5 = 32\,[\cos(-90°) + i \sin(-90°)]$$

i

$$x = 2\left[\cos\frac{-90° + 360 \cdot k}{5} + i \sin\frac{-90° + 360° \cdot k}{5}\right]$$

ili

$$x = 2\,[\cos(-18° + 72° \cdot k) + i \sin(-18° + 72° \cdot k)],$$

gdje je $k = 0, 1, 2, 3, 4.$

$x_1 = 2\,(\cos 18° - i \sin 18°) \doteq \underline{1{,}90 - i\,0{,}62.}$

$x_2 = 2\,(\cos 54° + i \sin 54°) \doteq \underline{1{,}18 + i\,1{,}62.}$

$x_3 = 2\,(\cos 126° + i \sin 126°) \doteq \underline{-1{,}18 + i\,1{,}62.}$

$x_4 = 2\,(\cos 198° + i \sin 198°) \doteq \underline{-1{,}90 - i\,0{,}62.}$

$x_5 = 2\,(\cos 270° + i \sin 270°) = \underline{-2\,i.}$

2. $x^3 - 8 = 0.$ $[2;\ -1 \pm i\sqrt{3}].$

3. $x^6 + 64 = 0.$ $[\pm 2\,i;\ \pm\sqrt{3} \pm i].$

4. $x^4 - 81 = 0.$ $[\pm 3;\ \pm 3\,i].$

b. Eksponent radikanda z je $\frac{p}{q} \neq n$

Sad uzmimo općenitiji slučaj: neka eksponent radikanda z nije $\frac{1}{n}$, već $\frac{p}{q} \neq n$, gdje su p i q pozitivni cijeli uzajamno prosti brojevi, tj. uzmimo

$$\sqrt[q]{z^p} = z^{\frac{p}{q}},$$

Prema formuli (4)' prikažimo z u općem eksponencijalnom obliku:

$$z = r\,e^{i(\varphi + 2k\pi)} = r \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\,2k\pi},$$

gdje je

$$k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm \ldots .$$

Tada je

$$\sqrt[q]{z^p} = z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{r^p} \cdot e^{\frac{i\varphi p}{q}} \cdot e^{\frac{i2k\pi p}{q}} \qquad (12)$$

pri čemu je $e^{\frac{2k\pi p}{q}} = 1$ točno onda, ako je k mnogokratnik od q i stoga $k\frac{p}{q}$ cio. Zato je dovoljno uzeti $k = 0, 1, 2, \ldots, q - 1.$

Neka je $p = 1$. Tada je

$$\sqrt[q]{z} = \sqrt[q]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{q}} \cdot e^{i\frac{2k\pi}{q}},$$

a logaritmiranje trećeg faktora $e^{i\frac{2k\pi}{q}}$ daje

$$i\frac{2\,k\,\pi}{q} \cdot \underbrace{\ln e}_{1} = i\frac{2\,k\,\pi}{q}.$$

Znamo da je $\frac{2\,\pi}{q} = \frac{\text{opseg kruga}}{q} = \text{arc}\,\varphi$, pa zaključujemo da $\sqrt[q]{z^p}$ ima q različitih vrijednosti za $k = 0, 1, 2, \ldots, (q - 1)$, koje leže u vrhovima pravilnog q-kutnika upisanog u kružnicu polumjera $\sqrt[q]{r^p}$ sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava. Taj mnogokut ima stranice kojima odgovaraju središnji kutovi $\frac{2\,k\,\pi\,p}{q}$, pri čemu k prima vrijednosti $0, 1, 2, \ldots, (q - 1)$, dok za vrijednosti k koje su veće od $(q - 1)$ vrijednosti korijena se ponavljaju.

Prema tome formula (12) u trigonometrijskom obliku tj. $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ glasi:

$$\sqrt[q]{z^p} = \sqrt[q]{r^p}\left[\cos\frac{\varphi\,p + 360°\,p \cdot k}{q} + i \sin\frac{\varphi\,p + 360°\,p \cdot k}{q}\right], \qquad (12)'$$

gdje je

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (q - 1).$$

Primjeri

1. $\omega = \sqrt[3]{(2+i)^2} = (2+i)^{\frac{2}{3}}$.

$$z = 2 + i = \left[r = \sqrt{5};\ \varphi = \text{arctg}\,\frac{1}{2} \doteq \text{arc}\,26°30'\right] = \sqrt{5}\,(\cos 26°30' + i \sin 26°30').$$

Računamo prema (12)' uzevši u obzir, da je $r = \sqrt{5}$, $p = 2$, $q = 3$, $\varphi = 26°30'$ i $k = 0, 1, 2$.

Dobivamo:

$$\omega = \sqrt[3]{z^2} = \sqrt[3]{(\sqrt{5})^2}\left[\cos\frac{26°30' \cdot 2 + 360 \cdot 2 \cdot k}{3} + i \sin\frac{26°30' \cdot 2 + 360° \cdot 2 \cdot k}{3}\right]$$

ili

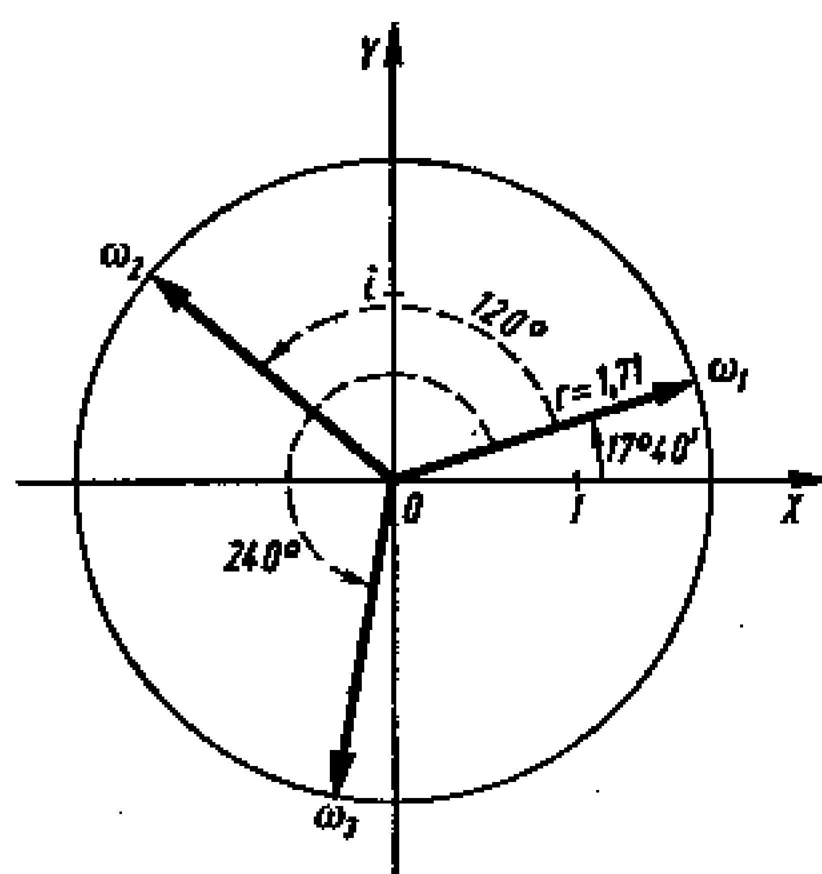
$$\omega = \sqrt[3]{5}\,[\cos(17°40' + 240° \cdot k) + i \sin(17°40' + 240° \cdot k)], \quad \text{gdje je} \quad k = 0, 1, 2.$$

$k = 0$: $\omega_1 = 1{,}71\,(\cos 17°40' + i \sin 17°40') \doteq \underline{1{,}71\,(0{,}95 + i\,0{,}30)}$

$k = 1$: $\omega_2 = 1{,}71\,[\cos(17°40' + 240°) + i \sin(17°40' + 240°)] =$
$= 1{,}71\,(-\cos 77°40' - i \sin 77°40') \doteq \underline{1{,}71(-0{,}21 - i0{,}98)}$.

$k = 2$: $\omega_3 = 1{,}71\,[\cos(17°40' + 480°) + i \sin(17°40' + 480°)] =$
$= 1{,}71\,(-\sin 47°40' + i \cos 47°40') \doteq \underline{1{,}71\,(-0{,}74 + i\,0{,}67)}$.

Vidi sl. 23.



Slika 23.

2. Izračunaj $\sqrt[4]{(1 + i\sqrt{3})^3}$ prema formuli (12)'.

[2,37 (1 + i); 2,37 (1 − i); 2,37 (−1 − i); 2,37 (−1 + i)].

§ 3. SVOJSTVA KONJUGIRANO KOMPLEKSNIH BROJEVA. O KORIJENIMA ALGEBARSKIH JEDNADŽBI S REALNIM KOEFICIJENTIMA

Znamo da dva kompleksna broja, koja se razlikuju samo u predznaku imaginarnih dijelova, čine par konjugirano kompleksnih brojeva. To su

$$z = x + i\,y \quad \text{i} \quad \bar{z} = x - i\,y \quad \text{ili} \quad z^* = x - i\,y,$$

odnosno u trigonometrijskom obliku

$$z = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi) \quad \text{i} \quad \bar{z} = r\,(\cos\varphi - i \sin\varphi)$$

ili u eksponencijalnom obliku

$$z = r\,e^{i\varphi} \quad \text{i} \quad \bar{z} = r\,e^{-i\varphi}.$$

Kako je $z = 0$ kad je $x = 0$ i $y = 0$, tako je i $\bar{z} = 0$, kad je $z = 0$.

Očito je da je

$$z + \bar{z} = 2\,x = 2\,\mathcal{R}(z),$$
$$z - \bar{z} = 2\,i\,y = 2\,i\,\mathcal{J}(z)$$

(»imaginarni dio« $\mathcal{J}(z)$ je po definiciji realni faktor od i).

$$\bar{z} \cdot \bar{z} = |z|^2, \text{ jer je } \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 = |z|^2,$$

$$\overline{(\bar{z})} = {}^*z^* = z, \text{ jer je } \bar{z} = z^* = x - i\,y, \text{ pa je } \bar{\bar{z}} = {}^*z^* = x + i\,y = z.$$

Pokažimo još da je $\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \bar{\omega}$, ako je $\dfrac{z_1}{z_2} = \omega$.

Iz $\dfrac{z_1}{z_2} = \omega$ slijedi da je $z_1 = z_2 \cdot \omega$, pa je

$$\bar{z}_1 = (\overline{z_2 \cdot \omega}) = \bar{z}_2 \cdot \bar{\omega}, \text{ a odatle je } \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \bar{\omega}.$$

Vrijedi općenito:

Ako smo nad kompleksnim brojevima

$$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$$

izvršili konačan broj operacija (zbrajanja, množenja, dijeljenja, potenciranja i korjenovanja) pa smo dobili rezultat ω, tada iste operacije izvedene u istim redoslijedu nad pripadnim konjugirano kompleksnim brojevima

$$\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \ldots, \bar{z}_n$$

daju konjugirano kompleksni rezultat $\bar{\omega}$.

Drugim riječima, ako u jednakosti sve kompleksne brojeve zamijenimo pripadnim konjugirano kompleksnim, dobit ćemo opet *jednakost*.

Npr. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = \omega,$

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = \bar{\omega}.$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = \omega, \qquad \text{(a)}$$

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = \bar{\omega}. \qquad \text{(b)}$$

Uzmemo li u (a) i (b), da je $z_1 = z_2 = z$ i $\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \bar{z}$, dobit ćemo

$$z^2 = (x^2 - y^2) + i(x^2 + y^2) = \omega,$$

$$\bar{z}^2 = (x^2 - y^2) - i(x^2 + y^2) = \bar{\omega}, \text{ tj. } (z^2)^* = (\bar{z})^2.$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = \omega,$$

$$\bar{z}^3 = (\bar{z})^2 \cdot \bar{z} = (z^2)^* \cdot \bar{z} = \bar{\omega}, \text{ ali } (z^2)^* = (\bar{z})^2, \text{ pa je } (\bar{z})^3 = (z^3)^* = \bar{\omega}.$$

Iz navedenog slijedi:

1) Ako je $x_0 = x + iy$ jedno rješenje algebarske jednadžbe n-tog stupnja s realnim koeficijentima:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

tj. $$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 = 0,$$

tada je $\bar{x}_0 = x - iy$ također korijen te jednadžbe,

tj. $$a_n \bar{x}_0^n + a_{n-1} \bar{x}_0^{n-1} + \dots + a_2 \bar{x}_0^2 + a_1 \bar{x}_0 + a_0 = 0.$$

2) Kompleksni korijeni algebarske jednadžbe s realnim koeficijentima dolaze uvijek u parovima kao konjugirano kompleksni, pa polinom s realnim koeficijentima može imati samo parni broj imaginarnih nultočaka.

3) Iz osnovnog teorema algebre, da polinom n-tog stupnja s realnim koeficijentima ima uvijek n nultočaka realnih ili kompleksnih, slijedi da jednadžba *neparnog* stupnja mora imati bar jedan realni korijen, dok jednadžba *parnog* stupnja ne mora imati realne korijene.

Znamo da lijevu stranu algebarske jednadžbe

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

možemo rastaviti u faktore

$$a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0,$$

gdje su $x_1, x_2, \dots, x_n$ korijeni te jednadžbe. Ako je $x = a_0 + i b_0$ korijen te jednadžbe, tada će u rastavljenom obliku jednadžbe doći faktor oblika

$$(x - a_0 - i b_0).$$

Budući da će u tom slučaju jednadžba imati i pripadni konjugirano kompleksni korijen $\bar{x} = a_0 - i b_0$, ući će u jednadžbu i faktor

$$(x - a_0 + i b_0).$$

Spojimo li ta dva faktora u jedan, dobit ćemo kvadratni trinom s *realnim* koeficijentima:

$$(x - a_0 - i b_0)(x - a_0 + i b_0) = x^2 - 2 a_0 x + a_0^2 + b_0^2.$$

Prema tome: svaki polinom s realnim koeficijentima možemo rastaviti u faktore, s realnim koeficijentima koji su polinomi prvog ili drugog stupnja.

Primijetimo još da broj *različitih* nultočaka polinoma može biti manji od stepena n polinoma, jer se neke nultočke mogu međusobno podudarati (višestruke nultočke), ali broj nultočaka, odnosno korijena algebarske jednadžbe n-tog stupnja bit će uvijek n, ako korijene brojimo prema njihovoj mnogostrukosti. Npr. jednadžba 5-stupnja $x^2(x-8)^3 = 0$ ima dvostruki korijen $x_{1,2} = 0$ i trostruki $x_{3,4,5} = 8$, pa ih ukupno ima 5.

Primjeri

Odredi sve nultočke zadanih polinoma, odnosno sve korijene zadanih jednadžbi.

1. $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 44x - 39 = 0,$

ako je poznato, da je $x_1 = 3 + 2i$ jedan od korijena te jednadžbe.

Kako kompleksni korijeni jednadžbe dolaze uvijek u parovima kao konjugirano kompleksni, bit će $\underline{x_2 = 3 - 2i}$ drugi korijen zadane jednadžbe.

U drugu ruku znamo, da algebarska jednadžba IV stupnja ima 4 korijena realna ili kompleksna. Da odredimo taj drugi par korijena, podijelimo jednadžbu s

$$[x - (3 + 2i)] \cdot [x - (3 - 2i)] = x^2 - 6x + 13.$$

Dobivamo

$$x^2 + 2x - 3 = 0,$$

a odatle je

$$\underline{x_3 = 1} \quad \text{i} \quad \underline{x_4 - 3}.$$

2. $x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100 = 0.$

Prikažemo li jednadžbu u obliku

$$x^2(x^2 + 6x + 9) + 10^2 = 0 \quad \text{ili} \quad x^2(x+3)^2 + 10^2 = 0,$$

možemo njenu lijevu stranu rastaviti u dva faktora:

$$[x(x+3) + 10i] \cdot [x(x+3) - 10i] = 0$$

pa imamo dvije kvadratne jednadžbe koje riješimo:

$$x^2 + 3x + 10i = 0 \quad \text{i} \quad x^2 + 3x - 10i = 0.$$

Riješimo prvu jednadžbu:

$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9-40i} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\omega$, gdje je $\omega = \sqrt{9-40i}$, pa je

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\omega. \qquad \text{(a)}$$

Stavimo $\sqrt{9-40i} = a + b\,i \;|^2$

$$9 - 40\,i = (a^2 - b^2) + 2\,a\,b\,i,$$

pa je $a^2 - b^2 = 9$, $a\,b = -20$, a odatle je $b = \frac{-20}{a}$.

Uvrštenje u $a^2 - b^2 = 9$ daje $a^4 - 9\,a^2 - 400 = 0$.

Slijedi: $a_{1,2} = \pm 5$, $a_{3,4} = \pm 4\,i$, pa je $\omega_{1,2} = \pm(5 - 4\,i)$.

Uvrštenje u (a) daje

$$\underline{x_1 = 1 - 2\,i} \quad \text{i} \quad \underline{x_2 = -4 + 2\,i}.$$

Na isti način rješavamo i drugu jednadžbu

$$x^2 + 3\,x - 10\,i = 0.$$

Dobivamo:

$$\underline{x_3 = 1 + 2\,i} \quad \text{i} \quad \underline{x_4 = -4 - 2\,i}.$$

3. $x^4 + 2\,x^3 - 24\,x + 72 = 0.$

Prikažimo zadanu jednadžbu u obliku:

$$x^4 + \underbrace{4\,x^3 - 4\,x^3}_{0} \underbrace{- 16\,x^2 + 12\,x^2 + 6\,x^2}_{+2x^2} \underbrace{- 48\,x + 24\,x}_{-24x} + 72 = 0$$

pa je

$$x^2(x^2 + 4\,x + 12) - 4\,x\,(x^2 + 4\,x + 12) + 6\,(x^2 + 4\,x + 12) = 0$$

i

$$(x^2 + 4\,x + 12)(x^2 - 4\,x + 6) = 0.$$

Slijedi:

$$x^2 + 4\,x + 12 = 0 \quad \text{i} \quad \underline{x_{1,2} = -2 \pm i\,2\sqrt{2}},$$

$$x^2 - 4\,x + 6 = 0 \quad \text{i} \quad \underline{x_{3,4} = 2 \pm i\sqrt{2}}.$$

4. $x^4 - 6\,x^3 + 11\,x^2 - 2\,x - 10 = 0,$

ako je $x_1 = 2 - i$. $[x_2 = 2 + i;\ x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{3}]$.

5. $4\,x^4 - 24\,x^3 + 57\,x^2 + 18\,x - 45 = 0,$

ako je $x_1 = 3 + i\sqrt{6}$. $\left[x_2 = 3 - i\sqrt{6};\ x_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

§ 4. BESKONAČNI NIZOVI I REDOVI KOMPLEKSNIH BROJEVA

Nizovi kompleksnih brojeva imaju općenito oblik:

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots$$

gdje je

$$z_n = x_n + i\,y_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Granična vrijednost ili **limes** niza kompleksnih brojeva definira se na isti način kao u realnom području: niz kompleksnih brojeva, kojemu je opći član z_n, ima za limes čvrsti broj $c = a + b\,i$, ako apsolutnu veličinu razlike $|z_n - c|$ možemo načiniti po volji malenom čim n uzmemo dovoljno velik, tj. čim idemo u nizu dovoljno daleko.

U tom slučaju pišemo

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c.$$

Nužni i dovoljni uvjet da broj $c = a + b\,i$ bude limes niza kompleksnih brojeva

$$x_1 + i\,y_1,\ x_2 + i\,y_2,\ x_3 + i\,y_3,\ \ldots,\ x_n + i\,y_n,\ \ldots$$

glasi da u tom slučaju mora biti:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Konvergencija, odnosno **divergencija beskonačnih redova** kompleksnih brojeva definira se također kao u realnom području (Vidi Repetitorij više matematike, Dio I):

Red $w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n + \cdots$, kojemu su elementi kompleksni brojevi

$$w_1 = u_1 + i\,v_1, \quad w_2 = u_2 + i\,v_2, \quad w_3 = u_3 + i\,v_3,\ \ldots,$$

konvergira, ako konvergira njegov niz parcijalnih suma i ima za limes konačni određeni broj.

Da red kompleksnih brojeva konvergira nužno je i dovoljno, da konve giraju posebno red realnih dijelova

$$\mathcal{R}(w_1) + \mathcal{R}(w_2) + \mathcal{R}(w_3) + \cdots + \mathcal{R}(w_n) + \cdots$$

i red imaginarnih dijelova

$$\mathcal{J}(w_1) + \mathcal{J}(w_2) + \mathcal{J}(w_3) + \cdots + \mathcal{J}(w_n) + \cdots$$

članova zadanog reda.

Ako su S_1 i S_2 sume tih redova, tada je kompleksni broj $S = S_1 + i\,S_2$ suma zadanog reda kompleksnih brojeva

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n + \cdots .$$

U tom je slučaju

$$\lim_{n\to\infty} w_n = 0, \quad \text{tj.} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} v_n = 0.$$

Ako konvergira red apsolutnih vrijednosti zadanog reda kompleksnih brojeva

$$|w_1| + |w_2| + |w_3| + \cdots + |w_n| + \cdots,$$

tada se kaže da red

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n + \cdots$$

konvergira apsolutno.

Kao i u realnom području definiraju se redovi potencija kompleksnih brojeva

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

gdje su $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ kompleksni brojevi, pri čemu su koeficijenti reda različiti od nule, a z je kompleksna promjenljiva.

Kao u realnom području radij konvergencije reda R određuje se prema formuli

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Ako taj limes postoji, red konvergira u krugu $|z - z_0| < R$, a divergira izvan tog kruga, tj. za one vrijednosti z koje zadovoljavaju nejednakost $|z - z_0| > R$.

Primjeri

1. Ispitaj konvergenciju zadanih redova i odredi njihove sume.

1) $(1 + i) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9}i\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{27}i\right) + \cdots .$

Rastavimo zadani red u red realnih i red čisto imaginarnih brojeva:

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) + i\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots\right).$$

[Oba reda konvergiraju, jer su njihovi članovi članovi padajućih geometrijskih redova, kojim su kvocijenti $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3} < 1$].

Prema poznatoj formuli $S = a_1 \frac{1}{1-q}$ za sumu konvergentnog geometrijskog reda imamo:

$$S_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \quad \text{i} \quad S_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Slijedi: zadani red kompleksnih brojeva konvergira i suma mu je

$$\underline{S = S_1 + S_2 = 2 + \frac{3}{2}i.}$$

2) $(1 + 0{,}1\,i) + \left(\frac{1}{2} + 0{,}01\,i\right) + \left(\frac{1}{3} + 0{,}001\,i\right) + \cdots .$

Promotrimo redove realnih i imaginarnih članova zadanog reda:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \quad \text{i} \quad 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \cdots .$$

Prvi red divergira, jer je harmonički red. Slijedi: zadani red kompleksnih brojeva divergira, jer divergira red realnih članova zadanog reda.

3) $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}i\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{4}{5}i\right) + \cdots .$

Promotrimo red realnih i red imaginarnih članova zadanog reda:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots \quad \text{i} \quad \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots .$$

Oba reda divergiraju, jer su članovi tih redova veći od pripadnih članova divergentnog harmoničkog reda. Slijedi: zadani red kompleksnih brojeva divergira.

4) $\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}i\right) + \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{4}i\right) + \left(\frac{1}{125} - \frac{1}{8}i\right) + \cdots .$

Oba reda konvergiraju, jer su geometrijski, kojim je kvocijent $q < 1$. $S = \frac{1}{4} - i$.

2. Da li zadani red konvergira apsolutno

$$\frac{1+i}{2} + \left(\frac{1+i}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^3 + \cdots ?$$

Prikažimo u eksponencijalnom obliku opći član $w_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ zadanog reda potencija.

Kako je

$$w_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n = \left[r = \sqrt{2};\ \varphi = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}\right] = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^n} e^{n\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} e^{n\frac{\pi}{4}},$$

bit će

$$|w_n| = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}.$$

Red apsolutnih vrijednosti modula zadanog reda tj.

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} + \cdots$$

čini beskonačni geometrijski red kvocijenta $\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} < 1$, pa taj red konvergira. Slijedi: zadani red kompleksnih brojeva konvergira apsolutno, jer konvergira red apsolutnih vrijednosti njegovih članova.

3. Pokaži da red

$$1 + \frac{1}{2!}(1+i) + \frac{1}{3!}(1+i)^2 + \frac{1}{4!}(1+i)^3 + \cdots$$

konvergira apsolutno.

4. Odredi područja konvergencije zadanih redova potencija

1) $\frac{\sqrt{3}+i}{3}(z-1) + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^2 (z-1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^3 (z-1)^3 + \cdots.$

Kako red potencija konvergira u krugu polumjera $|z - z_0| < R$, odredimo radij R kruga konvergencije zadanog reda.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^n}{\left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(\sqrt{3}+1)^n \cdot 3^{n+1}}{3^n \cdot (\sqrt{3}+1)^{n+1}} \right| = \frac{3}{|\sqrt{3}+i|} = \frac{3}{2}.$$

Područje konvergencije zadanog reda je krug $|z - 1| < \frac{3}{2}$ polumjera $\frac{3}{2}$.

Prikaži ga grafički!

2) $z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots.$

Računamo

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Zadani red konvergira u čitavoj kompleksnoj ravnini z.

3) $(z - 1 - i) + 2!(z - 1 - i)^2 + 3!(z - 1 - i)^3 + \cdots.$

[Red konvergira samo u točki $z = 1 + i$].

5. Ispitaj konvergenciju zadanih redova:

$$\left(1 + \frac{1}{2}i\right) + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2^2}i\right) + \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2^3}i\right) + \cdots,$$

$$\left(\frac{1}{1!} + \frac{i}{1}\right) + \left(\frac{1}{2!} + \frac{i}{2}\right) + \left(\frac{1}{3!} + \frac{i}{3}\right) + \cdots.$$

[Divergiraju].

§ 5. ELEMENTARNE FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMJENLJIVE

1. Eksponencijalna funkcija

Tu funkciju definiramo za bilo koji $z = x + iy$ formulom

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{13}$$

Pretpostavimo li da je eksponent realan, tj. da je $y = 0$, dobivamo

$$e^x = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x.$$

Vidimo da se za realne $z = x$ definicija podudara s običnom i da je modul izraza $e^z = e^{x+iy}$ jednak e^x, dok je njegov argument y.

Za eksponencijalnu funkciju vrijedi

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad \text{i} \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2},$$

jer je

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) =$$
$$= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} =$$
$$= e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{z_1+z_2}.$$

Dokaži na isti način drugu formulu!

Eksponencijalna funkcija je periodska s čisto imaginarnim periodom $2\pi i$, jer za bilo koji cijeli k imamo

$$e^{z+2\pi ki} = e^z \cdot e^{2\pi ki} = e^z,$$

pri čemu je prema formuli (5) $e^{2\pi ki} = 1$.

Uzmemo li u formuli (13) $x = 0$ i $y = \varphi$, dobivamo *Eulerovu formulu* $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$.

Primjeri

Izračunaj

1. $e^{i\frac{\pi}{2}}$ i $e^{1-i\frac{\pi}{2}}$.

Prema (13) imamo:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \left[x = 0;\ y = \frac{\pi}{2}\right] = e^0\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right) = \underline{i}.$$

$$e^{1-i\frac{\pi}{2}} = e\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = e \cdot i(-1) = \underline{-e\,i}.$$

2. $e^{2+\pi i}$. $[-e^2 \doteq -7{,}389]$.

3. e^{-2-3i}.

$$e^{-2-3i} = e^{-2}[\cos(-3) + i\sin(-3)] = \frac{1}{e^2}(\cos 3 - i\sin 3) =$$

$$\doteq \frac{1}{2{,}72^2}[\cos(3\cdot 57{,}3^\circ) - i\sin(3\cdot 57{,}3^\circ)] =$$

$$= \frac{1}{7{,}4}(\cos 171^\circ 54' - i\sin 171^\circ 54') = 0{,}135(-0{,}99 - i\,0{,}14) = \underline{-0{,}134 - i\,0{,}019.}$$

4. e^{2+3i}. $[-7{,}315 + i\,1{,}043]$.

5. e^{-2i}. $[\cos 2 - i\sin 2]$.

2. Logaritamska funkcija

Logaritamsku funkciju definiramo kao inverznu funkciju od eksponencijalne funkcije:

Broj w je logaritam broja $z \neq 0$, tj. $w = \mathrm{Ln}\, z$ (oznaka funkcije je Ln), ako je $e^w = z$.

Uzevši da je $z = r\,e^{i\varphi}$, a $w = u + i\,v$ dobivamo

$$e^{u+iv} = r\cdot e^{i\varphi}$$

ili

$$e^u\cdot e^{iv} = r\cdot e^{i\varphi},$$

a odatle slijedi: $e^u = r$ i $e^{iv} = e^{i\varphi}$, pa je

$$v = \varphi + 2\,k\,\pi, \quad \text{gdje je} \quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

dok je $u = \ln r$, a to je obični prirodni logaritam pozitivnog broja r.

Kako je $w = \mathrm{Ln}\, z = u + \mathrm{i}\, v$, dobivamo:

$$w = \mathrm{Ln}\, z = \ln r + i(\varphi + 2\,k\,\pi) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z \qquad (14)$$

$$k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots.$$

Iz navedenog slijedi, da je $\mathrm{Ln}\, z$ beskonačno mnogoznačna funkcija i da za $k = 0$ dobivamo glavnu vrijednost logaritma, koja se označuje s $\ln z$, pa je

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z. \qquad (14)'$$

Ako je z realni pozitivni broj, $\arg z = 0$, pa je

$$\ln z = \ln|z|. \qquad (14)''$$

Vidimo da se glavna vrijednost logaritma realna pozitivna broja podudara s običnim prirodnim logaritmom toga broja.

Kako vidimo, periodičnosti eksponencijalne funkcije odgovara beskonačna mnogoznačnost logaritamske funkcije. Slični odnos imamo i u realnom području, npr. između cirkularnih i ciklometrijskih funkcija. Dok su cirkularne funkcije periodske, ciklometrijske su beskonačno mnogoznačne.

Poznate formule za računanje s logaritmima realnih brojeva vrijede i za kompleksne brojeve.

$\mathrm{Ln}(z_1\cdot z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$, jer je prema (14):

$$\mathrm{Ln}(z_1\cdot z_2) = \ln|z_1\cdot z_2| + i\,\mathrm{Arg}(z_1\cdot z_2) = \ln(|z_1|\cdot|z_2|) +$$

$$+ i(\mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2) = \ln|z_1| + \ln|z_2| + i\,\mathrm{Arg}\, z_1 + i\,\mathrm{Arg}\, z_2 =$$

$$= (\ln|z_1| + i\,\mathrm{Arg}\, z_1) + (\ln|z_2| + i\,\mathrm{Arg}\, z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2.$$

Pokaži na isti način, da je

$$\mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2,$$

$$\mathrm{Ln}(z^n) = n\cdot \mathrm{Ln}\, z,$$

$$\mathrm{Ln}\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}\mathrm{Ln}\, z.$$

Primjeri

Izračunaj $\mathrm{Ln}\, z$ za

1. $z = 1$; $z = i$; $z = -1$ i $z = -i$.

Računamo prema (14):

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln r + i\,\mathrm{Arg}\, z, \text{ gdje je } \mathrm{Arg}\, z = \varphi + 2\,k\,\pi, \qquad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots.$$

Za $z = 1$: $r = 1$, $\varphi = 0$:

$$\mathrm{Ln}\, 1 = \ln 1 + i(0 + 2\,k\,\pi) = 0 + i\,2\,k\,\pi = i\,2\,k\,\pi;\ \ln 1 = 0, \qquad k = 0;\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots.$$

$z = i$: $r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

$$\mathrm{Ln}\, i = \underline{i\left(\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\right)}; \quad \ln i = i\,\frac{\pi}{2}.$$

$z = -1$: $r = 1$, $\varphi = \pi$.

$$\mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2\,k\,\pi) = \underline{i\,\pi(2\,k + 1)}; \quad \ln(-1) = i\,\pi.$$

$z = -i$: $r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

$$\mathrm{Ln}(-i) = i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\right) = \underline{\left(2\,k - \frac{1}{2}\right)\pi\, i}; \quad \ln(-i) = -\frac{\pi}{2}\,i.$$

2. $\mathrm{Ln}(1+i)$.

$$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2};\quad \mathrm{Arg}\, z=\mathrm{arc\,tg}\,1+2k\pi=\frac{\pi}{4}+2k\pi.$$

$$\mathrm{Ln}(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\doteq\frac{1}{2}\cdot 0{,}693+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=\underline{0{,}347+i\pi(2k+0{,}25)};$$

$$\ln(1+i)=\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{\pi}{4}.$$

3. $\mathrm{Ln}(5-3i)$.

$$r=\sqrt{34};\ \arg z=\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{-3}{5}\right)=-\,\mathrm{arc\,tg}\,0{,}60\doteq-\,\mathrm{arc}\,31^{0}\doteq-0{,}54.$$

$$\mathrm{Ln}(5-3i)\doteq\frac{1}{2}\ln 34+i(-0{,}54+2k\pi)\doteq\frac{1}{2}\cdot 3{,}53+i(-0{,}54+2k\pi)=$$

$$=\underline{1{,}77+i(-0{,}54+2k\pi)}.\qquad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots.$$

4. $\mathrm{Ln}\dfrac{1+i}{1-i}$.

$$\mathrm{Ln}\frac{1+i}{1-i}=\mathrm{Ln}\frac{(1+i)(1+i)}{1+1}=\mathrm{Ln}\frac{1+2i-1}{2}=\mathrm{Ln}\,i=[\text{vidi 1. primjer}]=\underline{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}.$$

5. $\mathrm{Ln}(2i-\sqrt{-7})$.

$$w=\mathrm{Ln}(2i\mp i\sqrt{7})=\mathrm{Ln}(2\mp\sqrt{7})\,i.$$

Kako je $r_{1,2}=|2\mp\sqrt{7}|$; $\varphi_1=\pi$, $\varphi_2=0$, dobivamo

$$\underline{w_1=\ln|2-\sqrt{7}|+i(-\pi+2k\pi)};\qquad \underline{w_2=\ln(2+\sqrt{7})+i\,2k\pi}.$$

6. $\mathrm{Ln}(-2+i)$.

$$r=\sqrt{5};\ \varphi=\mathrm{arc\,tg}\frac{1}{-2}=\pi-\mathrm{arc\,tg}\,0{,}5\doteq\pi-0{,}463\doteq 2{,}679.$$

$$\mathrm{Ln}(-2+i)\doteq\frac{1}{2}\ln 5+i(2{,}679+2k\pi)=\underline{0{,}805+2{,}679\,i+2k\pi i}.$$

7. $\mathrm{Ln}(-3+4i)$. $\qquad [1{,}61+i\{(2k+1)\pi-2{,}21\}]$.

8. $\mathrm{Ln}(3\pm i\sqrt{3})$. $\qquad \left[\ln 2\sqrt{3}+i\left(2k\pm\dfrac{1}{6}\right)\pi\right]$.

9. Izračunaj $\mathrm{Ln}\, z$ za

1) $z=2$; 2) $z=-2$; 3) $z=2i$; 4) $z=-2i$; 5) $z=i-\sqrt{3}$; 6) $z=2-i\sqrt{2}$.

$$\left[\begin{array}{l}1)\ \ln 2+2k\pi i;\quad 2)\ \ln 2+(2k+1)\pi i;\quad 3)\ \ln 2+\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i;\\ 4)\ \ln 2+\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi i;\quad 5)\ \ln 2+\left(2k+\frac{5}{6}\right)\pi i;\quad 6)\ \ln 6+i\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi\end{array}\right].$$

3. Trigonometrijske funkcije

Znamo da zbrajajući i oduzimajući I i II Eulerovu formulu za e^{ix} i e^{-ix} (vidi npr. Repetitorij više matematike, Dio I. od istog autora), dobivamo za funkcije sinusa i kosinusa realne promjenljive x izraze

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},\qquad\qquad (a)$$
$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}.$$

Te formule vrijede i za kompleksnu promjenljivu $z=x+iy$:

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\qquad\qquad (15)$$
$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$$

a odatle slijedi:

$$\mathrm{tg}\, z=\frac{\sin z}{\cos z}=-i\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}=-i\,\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}\quad\text{i}\quad \mathrm{ctg}\, z=\frac{\cos z}{\sin z}$$

jer za realne z, tj. za $z=x$ $(y=0)$ dobivamo gore navedene formule (a).

Lako se može pokazati da su trigonometrijske funkcije kompleksne promjenljive sačuvale većinu svojstava trigonometrijskih funkcija realne promjenljive. Tako, na primjer, iz periodičnosti funkcije e^z, kojoj je period $2\pi i$, slijedi da funkcije $\sin z$ i $\cos z$ imaju period 2π, a $\mathrm{tg}\, z$ i $\mathrm{ctg}\, z$ period π.

Pokažimo to:

$$\sin(z+2\pi)=[\text{prema (15)}]=\frac{e^{i(z+2\pi)}-e^{-i(z+2\pi)}}{2i}=$$
$$=\frac{1}{2i}[e^{iz+2\pi i}-e^{-iz-2\pi i}]=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sin z.$$

Pokaži isto za $\cos z$.

Isto tako se može pokazati da su za trigonometrijske funkcije kompleksne promjenljive ostale na snazi formule iz trigonometrije realne promjenljive.

Pokažimo da za $\sin z$ i $\cos z$ vrijedi poznata formula $\sin^2 z+\cos^2 z=1$:

$$\sin^2 z+\cos^2 z=\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2=\frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{-4}+$$
$$+\frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4}=\frac{1}{4}(-e^{2iz}+2-e^{-2iz}+e^{2iz}+2+e^{-2iz})=\frac{1}{4}\cdot 4=1,$$

a također poznate formule za zbroj, odnosno razliku argumenata imaju formalno sličan oblik:

$$\sin(x \pm i\,y) = \sin x \cos(i\,y) \pm \cos x \sin(i\,y).$$

Kako je prema (a) $\cos(i\,y) \doteq \dfrac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \operatorname{ch} y$ i $\sin(i\,y) = \dfrac{e^{-y} - e^{y}}{2\,i} = i \operatorname{sh} y$, dobivamo

$$\sin(x \pm i\,y) = \sin x \operatorname{ch} y \pm i \cos x \operatorname{sh} y.$$

Na isti način dobivamo (16)

$$\cos(x \pm i\,y) = \cos x \operatorname{ch} y \mp i \sin x \operatorname{sh} y.$$

Međutim za razliku od trigonometrijskih funkcija realne promjenljive modul funkcija $\sin z$ i $\cos z$ može biti veći od 1, čak po volji velik.

Izračunajmo npr. $\cos i$ i $\sin i$ prema formulama (15):

$$\cos i = \frac{e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right) \doteq 1{,}543,$$

$$\sin i = \frac{e^{i \cdot i} - e^{-i \cdot i}}{2\,i} = \frac{1}{2\,i}(e^{-1} - e) = \frac{i}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) \doteq 1{,}174i. \qquad \text{(a)}$$

Primjeri

Izračunaj:

1. $\cos(5 - i) =$ [prema formuli $\cos(\alpha - \beta)$] $= \cos 5 \cos i + \sin 5 \cdot \sin i =$ [prema (a)] $=$
$= \cos 5 \cdot \dfrac{1}{2}\left(e + \dfrac{1}{e}\right) + \sin 5 \cdot \dfrac{i}{2}\left(e - \dfrac{1}{e}\right) \doteq \underline{0{,}438 + i\,1{,}127.}$

2. $\sin(1 - 5i) =$ [prema formuli $\sin(\alpha - \beta)$] $= \sin 1 \cdot \cos 5\,i - \cos 1 \cdot \sin 5\,i =$ [prema (15)] $=$
$= \sin 1 \cdot \dfrac{e^{5i \cdot i} + e^{-5i \cdot i}}{2} - \cos 1 \cdot \dfrac{e^{5i \cdot i} - e^{-5i \cdot i}}{2\,i} = \dfrac{1}{2}\left(e^5 + \dfrac{1}{e^5}\right)\sin 1 - \dfrac{i}{2}\left(e^5 - \dfrac{1}{e^5}\right)\cos 1 \doteq$
$\doteq \underline{62{,}45 - i\,40{,}09.}$

3. $\sin(-1 + 2\,i)$. $\qquad [-3{,}16 + i\,1{,}96]$.

4. $\operatorname{tg} i = \left[\text{prema } \operatorname{tg} z = -i\dfrac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} \text{ i } z = i\right] = -i\dfrac{e^{-2} - 1}{e^{-2} + 1} \doteq -i\dfrac{0{,}135 - 1}{0{,}135 + 1} =$
$= -i\dfrac{-0{,}865}{1{,}135} = \underline{i\,0{,}763.}$

5. Izračunaj sve vrijednosti z iz zadanih jednadžbi.

1) $\cos z = 2$.

Prema (15) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ jednadžba prima oblik:

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2 \,\Big|\, \cdot 2\,e^{iz}$$

$$e^{2iz} - 4\,e^{iz} + 1 = 0.$$

Uz $e^{iz} = u$ dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$u^2 - 2\,u + 1 = 0, \quad \text{pa je} \quad u_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Slijedi: $e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$.

Logaritmiranje prema (14) $\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2\,k\,\pi)$ daje

$$i\,z = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + i(0 + 2\,k\,\pi) \,|\, : i$$

$$z = \frac{1}{i}\ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2\,k\,\pi.$$

Kako je $2 - \sqrt{3} = \dfrac{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{2 + \sqrt{3}} = \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}}$, bit će $\ln(2 - \sqrt{3}) = -\ln(2 + \sqrt{3})$, dok je $\dfrac{1}{i} = -i$, pa dobivamo

$$z_1 = -i\ln(2 + \sqrt{3}) + 2\,k\,\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$
$$z_2 = +i\ln(2 + \sqrt{3}) + 2\,k\,\pi.$$

Budući da je $\ln(2 + \sqrt{3}) \doteq \ln 3{,}73 = \log 3{,}73 \cdot M = 0{,}571 \cdot 2{,}30 = 1{,}317$

$$\underline{z \doteq \mp 1{,}317\,i + 2\,k\,\pi.}$$

Kako vidimo, z prima beskonačno mnogo vrijednosti i to naravno samo imaginarnih.

2) $\sin z = 2$.

Kako je $\sin z = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right)$, jednadžba prima oblik

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = 2,$$

pa prema rezultatima predašnjeg zadatka imamo

$$\frac{\pi}{2} - z = \mp i\ln(2 + \sqrt{3}) + 2\,k\,\pi \,\Big|\, \cdot (-1)$$

$$z = \pm i\ln(2 + \sqrt{3}) + 2\,k\,\pi + \frac{\pi}{2}$$

ili

$$\underline{z \doteq \pm 1{,}317\,i + \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi,} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Vrijednosti luka z predočene su, kao i u zadatku 1), točkama koje leže na imaginarnoj osi kompleksne ravnine.

3) $\cos z = 5$. $\qquad [z_{1,2} \doteq \mp 2{,}29\,i + 2\,k\,\pi]$.

4) $\cos z = -5$.

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = -5 \,\Big|\, \cdot 2\,e^{iz}$$

$e^{2iz} + 10\,e^{iz} + 1 = 0$, odnosno $u^2 + 10\,u + 1 = 0$ za $e^{iz} = u$.

$u_{1,2} = -5 \pm 2\sqrt{6}$, pa je $e^{iz} = -5 \pm 2\sqrt{6} \doteq -5 + 4{,}90 < 0$.

Logaritmiranje prema (14) daje

$$i z = \ln|-5 \pm 2\sqrt{6}| + (\pi + 2k\pi) i \quad | : i$$

ili

$$z_{1,2} = -i \ln|-5 \pm 2\sqrt{6}| + \pi + 2k\pi$$

Kako je $-5 - 2\sqrt{6} = \frac{(-5 - 2\sqrt{6})(-5 + 2\sqrt{6})}{-5 + 2\sqrt{6}} = \frac{1}{-5 + 2\sqrt{6}}$, dok je

$$\ln|-5 - 2\sqrt{6}| = -\ln|-5 + 2\sqrt{6}|,$$

dobivamo

$$z_{1,2} = \mp i \ln|-5 + 2\sqrt{6}| + \pi + 2k\pi$$

ili

$$z_{1,2} \doteq \mp i \ln|-5 + 4{,}90| + \pi + 2k\pi = \mp i \ln(0{,}10) + \pi + 2k\pi.$$

$$z_{1,2} = \mp i(-1 \cdot 2{,}30) + \pi + 2k\pi = \underline{\pm i\, 2{,}30 + \pi(2k+1)}; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

5) $\sin z = \frac{4i}{3}$.

Pomnožimo li $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{4i}{3}$ s $2i$, dobit ćemo $e^{iz} - e^{-iz} = -\frac{8}{3}$, a supstitucija $e^{iz} = u$, odnosno $e^{-iz} = \frac{1}{u}$ daje:

$$u - \frac{1}{u} = -\frac{8}{3} \quad \text{ili} \quad 3u^2 + 8u - 3 = 0,$$

pa je

$$u_{1,2} = \frac{-4 \pm 5}{3}.$$

Slijedi:

$u_1 = \frac{1}{3}$	$u_2 = -3$
$e^{iz} = \frac{1}{3}$	$e^{-iz} = -\frac{1}{3}$
$i z = \ln\frac{1}{3} + i\, 2k\pi \,\Big|\, \cdot \frac{1}{i} = -i$	$-iz = -\ln 3 + i(\pi + 2k\pi) \,\|\, \cdot i$
$\underline{z_1 = +i \ln 3 + 2k\pi.}$	$\underline{z_2 = -i \ln 3 - (\pi + 2k\pi).}$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

6) $\operatorname{ctg} z = -\frac{3i}{5}$.

Prema $\operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z} = i\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}$ imamo

$$i\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = -\frac{3i}{5} \,\Big|\, \cdot \frac{5(e^{2iz} - 1)}{i}$$

$$5(e^{2iz} + 1) = -3(e^{2iz} - 1)$$

Stavimo $e^{2iz} = u$. Dobivamo $5u + 5 = -3u + 3$, a odatle je $u = -\frac{1}{4}$, pa je $e^{2iz} = -\frac{1}{4}$.

Logaritmiranje daje:

$$2iz = \ln\left|-\frac{1}{4}\right| + i(\pi + 2k\pi), \quad \text{ili} \quad -z = -\frac{i}{2} \cdot 2\ln 2 - \frac{1}{2}(\pi + 2k\pi),$$

pa je

$$\underline{z = i \ln 2 + \pi\left(k + \frac{1}{2}\right)}.$$

7) $\operatorname{tg} z = \frac{5i}{3}$. $\left[i \ln 2 + \pi\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]$.

8) $\cos z = \frac{3+i}{4}$. $\left[\pm\left(-\frac{i}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi\right]$.

9) $\sin z = 5$. $\left[\pm 2{,}29\, i + \pi\left(2k + \frac{1}{2}\right)\right]$.

4. Arkus-funkcije, tj. inverzne trigonometrijske funkcije

Ako je $z = \sin w$, tada je $w = \operatorname{Arc} \sin z$.

Iz $z = \sin w$ slijedi prema (15):

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \,\Big|\, \cdot 2ie^{iw}$$

$$2zie^{iw} = e^{2iw} - 1$$

ili

$$(e^{iw})^2 - 2zie^{iw} - 1 = 0.$$

Uz supstituciju $e^{iw} = u$ dobivamo

$$u^2 - 2ziu - 1 = 0$$

a odatle je

$$u = zi + \sqrt{-z^2 + 1} \quad \text{ili} \quad e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}.$$

Ne pišemo dvostruki predznak ispred korijena, jer $\sqrt[n]{z}$ znači sve vrijednosti korijena.

Logaritmiranje daje:

$$iw = \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}) \,|\, \cdot i$$

$$w = \operatorname{Arc} \sin z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}). \qquad (17)$$

Višeznačnost te funkcije određena je dvoznačnošću korijena i beskonačnom mnogoznačnošću logaritma.

Na isti način dobivamo iz $z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$

$$w = \text{Arc}\cos z,$$

a također

$$2\,z\,e^{iw} - e^{2iw} - 1 = 0$$

ili

$$e^{2iw} - 2\,z\,e^{iw} + 1 = 0$$

a odatle je

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

i

$$i\,w = \text{Ln}\,(z + \sqrt{z^2 - 1}) \mid \cdot\, i$$

$$w = \text{Arc}\cos z = -\,i\,\text{Ln}\,(z + \sqrt{z^2 - 1}). \qquad (17)'$$

$$w = \text{Arc}\,\text{tg}\,z.$$

Slijedi

$$z = \text{tg}\,w = \frac{\sin w}{\cos w} = [\text{prema (15)}] = -i\,\frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1},$$

pa je $z = -i\,\frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$, gdje je $u = e^{iw}$.

Iz kvadratne jednadžbe $u^2\,(i\,z - 1) = -1 - i\,z$ dobivamo

$$u = \sqrt{\frac{1 + i\,z}{1 - i\,z}} = e^{iw}$$

pa logaritmiranje daje

$$i\,w = \frac{1}{2}\,\text{Ln}\,\frac{1 + i\,z}{1 - i\,z}, \quad \text{odnosno} \quad w = -\frac{i}{2}\,\text{Ln}\,\frac{1 + i\,z}{1 - i\,z},$$

pa je

$$\text{Arc}\,\text{tg}\,z = -\,\frac{i}{2}\,\text{Ln}\,\frac{1 + i\,z}{1 - i\,z}. \qquad (17)''$$

Na slični način dobivamo

$$\text{Arc}\,\text{ctg}\,z = -\,\frac{i}{2}\,\text{Ln}\,\frac{z - i}{z + i}. \qquad (17)'''$$

Primjeri

Izračunaj:

1. Arc sin i.

Uvrštenje $z = i$ u formulu (17) daje

$$\text{Arc}\sin i = -i\,\text{Ln}\,(-1 \pm \sqrt{2}). \qquad \text{(a)}$$

Ako ispred korijena uzmemo predznak »+«, dobit ćemo:

$$(\text{Arc}\sin i)_1 = -i\,\text{Ln}\,(\sqrt{2} - 1) = [\text{prema (14)}] = -i\,[\ln(\sqrt{2} - 1) + i\,(0 + 2\,k\,\pi)] =$$

$$= \underline{2\,k\,\pi - i\,\ln(\sqrt{2} - 1)}. \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Prema (a), ako ispred korijena uzmemo predznak »−«:

$$(\text{Arc}\sin i)_2 = -i\,\text{Ln}\,(-1 - \sqrt{2}) = -i\,[\ln(\sqrt{2} + 1) + i\,(\pi + 2\,k\,\pi)] =$$

$$= \underline{(2\,k + 1)\,\pi - i\,\ln(\sqrt{2} + 1)}. \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

2. $w = \text{Arc}\cos \frac{3\,i}{4}$.

Prema (17)′ imamo:

$$w = -i\,\text{Ln}\left(\frac{3\,i}{4} \pm \sqrt{-\frac{9}{16} - 1}\right) = -i\,\text{Ln}\left(\frac{3\,i}{4} \pm i\,\frac{5}{4}\right).$$

Kako je $\left(\frac{3\,i}{4} \pm i\,\frac{5}{4}\right) = 2\,i$, odnosno $-\frac{i}{2}$, dobivamo dva rješenja:

$$w_1 = -i\,\text{Ln}\,(2i) = -i\left[\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\right)\right] = -i\ln 2 + \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi,$$

$$w_2 = -i\,\text{Ln}\left(-\frac{i}{2}\right) = -i\left[\ln\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\right)\right] = +\,i\ln 2 - \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi.$$

ili

$$\underline{w_{1,2} = \pm\left(-i\ln 2 + \frac{\pi}{2}\right) + 2\,k\,\pi}, \quad \text{gdje je} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

3. Arc cos $\frac{3 + i}{4}$. $\left[\pm\left(-\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\right) + 2\,k\,\pi\right]$.

4. Arc tg $(\sqrt{2} - i)$.

Prema (17)″ imamo:

$$\text{Arc}\,\text{tg}\,(\sqrt{2} - i) = -\,\frac{i}{2}\,\text{Ln}\,\frac{1 + i\,(\sqrt{2} - i)}{1 - i\,(\sqrt{2} - i)} = -\,\frac{i}{2}\,\text{Ln}\,\frac{1 + i\sqrt{2} + 1}{1 - i\sqrt{2} - 1} = -\,\frac{i}{2}\,\text{Ln}\,\frac{i\sqrt{2} + 2}{-\,i\sqrt{2}} =$$

$$= [\text{brojnik i nazivnik numerusa množimo s } i\sqrt{2}] = -\,\frac{i}{2}\,\text{Ln}\,(i\sqrt{2} - 1) =$$

$$= -\,\frac{i}{2}\left[\frac{1}{2}\ln 3 + i\,(\pi - \text{arc}\,\text{tg}\,\sqrt{2} + 2\,k\,\pi)\right] =$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\,[(2\,k + 1)\,\pi - \text{arc}\,\text{tg}\,\sqrt{2}] - \frac{i}{4}\ln 3}.$$

5. Arc tg $\frac{5i}{3}$. $\left[i\ln 2 + \pi\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]$.

6. Arc tg $\frac{i}{2}$. $\left[\frac{i}{2}\ln 3 + k\pi\right]$.

7. Arc sin 3.

Prema (17):

$$\text{Arc}\sin 3 = -i\,\text{Ln}\,(3i \pm \sqrt{1-9}) = -i\,\text{Ln}\,(3i \pm i\,2\sqrt{2}) =$$

$$= -i\ln(3 \pm 2\sqrt{2}) + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right).$$

8. Arc sin 0. $[k\pi]$.

9. Arc cos 0.

$$\text{Arc}\cos 0\ [\text{prema } (17)'] = -i\,[\text{Ln}\,(0+i)] = -i\left[\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right] = \underline{\frac{\pi}{2} + k\pi.}$$

10. Arc cos 2. $[\pm 1{,}317\,i + 2k\pi]$.

11. Arc tg $2i$.

$$\text{Arc}\,\text{tg}\,2i = [\text{prema formuli } (17)''] = -\frac{i}{2}\text{Ln}\frac{1-2}{1+2} = -\frac{i}{2}\text{Ln}\left(-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= -\frac{i}{2}\left[\ln\frac{1}{3} + i(\pi + 2k\pi)\right] = \frac{2k+1}{2}\pi + \frac{i}{2}\ln 3 =$$

$$= k\pi + \left(\frac{\pi}{2} + i\,\frac{1}{2}\ln 3\right) \doteq \pi k + \left(\frac{\pi}{2} + 0{,}5493\,i\right).$$

5. Hiperbolne funkcije

Hiperbolne funkcije kompleksne promjenljive z definiramo kao u realnom području (vidi Repetitorij više matematike, dio I):

$$\text{sh}\,z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \qquad \text{ch}\,z = \frac{e^z + e^{-z}}{2};$$

$$\text{th}\,z = \frac{\text{sh}\,z}{\text{ch}\,z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}; \qquad \text{cth}\,z = \frac{1}{\text{th}\,z} = \frac{\text{ch}\,z}{\text{sh}\,z}. \qquad (18)$$

Neposredno iz tih definicija slijedi da su funkcije sh z i ch z periodske s periodom $2\pi i$, a funkcije th z i cth z imaju period πi, jer su kombinacije eksponencijalne funkcije e^z, kojoj je, kako znamo, period $2\pi i$. Da izvedemo vezu između hiperbolnih i trigonometrijskih funkcija, uvrstimo iz mjesto z u formule (15).

Uvrštenje iz mjesto z u $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ daje:

$$\sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2i} = -\frac{1}{i}\,\frac{e^z - e^{-z}}{2} = [\text{prema } (18)] = -\frac{1}{i}\,\text{sh}\,z,$$

pa je

$$\text{sh}\,z = -i\sin iz.$$

Na isti način dobivamo:

$$\begin{aligned} \text{ch}\,z &= \cos iz, \\ \text{th}\,z &= -i\,\text{tg}\,iz, \\ \text{cth}\,z &= i\,\text{ctg}\,iz, \end{aligned} \qquad (19)$$

a odatle je

$$\begin{aligned} \text{sh}\,iz &= i\sin z, \\ \text{ch}\,iz &= \cos z, \end{aligned} \qquad (19)'$$

ako mjesto z uvrstimo u prve dvije formule iz.

Odatle slijedi: bilo koja relacija između trigonometrijskih funkcija $\sin z$ i $\cos z$ prelazi u relaciju između hiperbolnih funkcija sh z i ch z, ako u polaznoj relaciji zamijenimo $\sin z$ i $\cos z$ s $i\,\text{sh}\,z$ i ch z. Npr. izvršimo li tu zamjenu u relaciji $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, dobit ćemo $\text{ch}^2 z + (i\,\text{sh}\,z)^2 = \text{ch}^2 z - \text{sh}^2 z = 1$.

Pokaži na isti način, da je $\text{sh}\,2z = 2\,\text{sh}\,z\,\text{ch}\,z$,

$$\begin{aligned} &\text{sh}\,(z_1 + z_2) = \text{sh}\,z_1\,\text{ch}\,z_2 + \text{ch}\,z_1\,\text{sh}\,z_2 \\ \text{i}\quad &\text{ch}\,(z_1 + z_2) = \text{ch}\,z_1\,\text{ch}\,z_2 + \text{ch}\,z_1\,\text{sh}\,z_2, \end{aligned} \qquad (20)$$

a odatle prema (19)' imamo:

$$\begin{aligned} \text{sh}\,(x + iy) &= \text{sh}\,x\cos y + i\,\text{ch}\,x\sin y \\ \text{ch}\,(x + iy) &= \text{ch}\,x\cos y + i\,\text{sh}\,x\sin y. \end{aligned} \qquad (20)'$$

Primjeri

Izračunaj

1. ch i; sh i; th i.

ch i = ?

Kako je prema (19) ch $z = \cos iz$, dobivamo za $z = i$:

$$\text{ch}\,i = \cos(i^2) = \cos(-1) = \cos 1 \doteq \cos 57{,}3° \doteq \underline{0{,}54}.$$

sh i = ?

Prema (19):

$$\text{sh}\,i = -i\sin(i^2) = +i\sin 1 \doteq i\sin 57{,}3° \doteq \underline{0{,}84\,i}.$$

Pokus: $\text{ch}^2 i - \text{sh}^2 i = 0{,}29 + 0{,}71 = \underline{1}$.

$\operatorname{th} i = ?$

$$\operatorname{th} i = \frac{\operatorname{sh} i}{\operatorname{ch} i} = \frac{i \sin 1}{\cos 1} = i \operatorname{tg} 1 \doteq \underline{1{,}56\, i.}$$

2. $\operatorname{sh}(-3 + i)$.

Prema formuli (20):

$$\operatorname{sh}(-3 + i) = -\operatorname{sh} 3 \cdot \operatorname{ch} i + \operatorname{ch} 3 \cdot \operatorname{sh} i = [\text{prema primjeru 1.}] =$$

$$= -\operatorname{sh} 3 \cdot \cos 1 + \operatorname{ch} 3 \cdot i \sin 1 = \underline{\frac{1}{2}(e^{-3} - e^{3}) \cos 1 + \frac{i}{2}(e^{3} + e^{-3}) \sin 1.}$$

3. $\operatorname{sh}(1 + i) = \operatorname{sh} 1 \cdot \operatorname{ch} i + \operatorname{ch} 1 \cdot \operatorname{sh} i = [\text{prema zadatku 1}] = \operatorname{sh} 1 \cdot \cos 1 + \operatorname{ch} 1 \cdot i \sin 1 =$

$$= \underline{\operatorname{sh} 1 \cdot \cos 1 + i \operatorname{ch} 1 \cdot \sin 1.}$$

4. $\operatorname{ch}(1 + i)$. $[\operatorname{ch} 1 \cdot \cos 1 - i \operatorname{sh} 1 \cdot \sin 1]$.

5. $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}$.

Prema (18):

$$\frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{ili} \quad e^{z} + e^{-z} - 1 = 0.$$

Uzevši $e^{z} = u$ dobivamo

$$u + \frac{1}{u} - 1 = 0 \quad \text{ili} \quad u^{2} - u + 1 = 0,$$

pa je

$$u_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$u_{1} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$, pa je $(e^{z})_{1} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$, a odatle je

$$z_{1} = \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left[r = 1;\ \varphi = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}\right] = i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \underline{\frac{\pi}{3} i + 2k\pi i.}$$

$$(e^{z})_{2} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad z_{2} = \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left[r = 1;\ \varphi = -\frac{\pi}{3}\right] = \underline{-\frac{\pi}{3} i + 2k\pi i.}$$

6. Area-funkcije

Za inverzne hiperbolne funkcije kompleksne promjenljive z dobivamo vezu tih funkcija s prirodnim logaritmima na način naveden kod Arcus-funkcija:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ar\,sh} z &= \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^{2} + 1}\right), \\ \operatorname{Ar\,ch} z &= \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^{2} - 1}\right), \\ \operatorname{Ar\,th} z &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}, \\ \operatorname{Ar\,cth} z &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + 1}{z - 1}. \end{aligned} \tag{21}$$

Sve su te funkcije beskonačno mnogoznačne. Isti oblik imaju te funkcije u realnom području. (Vidi Repetitorij više matematike, Dio I).

Primjeri

Izračunaj:

1. $\operatorname{Ar\,sh} i$.

$$\operatorname{Ar\,sh} i = [\text{prema prvoj formuli (21)}] =$$

$$= \operatorname{Ln}\left(i + \sqrt{-1 + 1}\right) = \operatorname{Ln} i = \left[\text{prema (14)},\ r = 1,\ \varphi = \frac{\pi}{2}\right] =$$

$$= \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \underline{\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

2. $\operatorname{Ar\,sh}(-1)$.

$$\operatorname{Ar\,sh}(-1) = \operatorname{Ln}\left(-1 \pm \sqrt{1 + 1}\right) = \operatorname{Ln}\left(-1 \pm \sqrt{2}\right) =$$

$$= [\text{prema (14)}: r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2},\ \varphi_{1} = 0 \text{ i } \varphi_{2} = \pi].$$

$$z_{1} = \ln(\sqrt{2} - 1) + i(0 + 2k\pi) = \underline{\ln(\sqrt{2} - 1) + 2k\pi i.}$$

$$z_{2} = \ln\left|-\sqrt{2} - 1\right| + i(\pi + 2k\pi) = \underline{\ln(\sqrt{2} + 1) + (2k + 1)\pi i.}$$

3. $\operatorname{Ar\,th} i$.

$$\operatorname{Ar\,th} i = [\text{prema trećoj formuli (21)}] = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + i}{1 - i} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{(1 + i)^{2}}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} i =$$

$$= \left[r = 1,\ \varphi = \frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right] = \frac{1}{2} \cdot i\pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right) =$$

$$= \underline{\left(k + \frac{1}{4}\right)\pi i.}$$

4. $\operatorname{th} z = 2$; $z = ?$ $\left[\ln \sqrt{3} + \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i\right]$.

5. $\operatorname{sh} z = \frac{i}{2}$; $z = ?$ $\left[\pm \frac{\pi}{6} i + 2k\pi i\right]$.

6. $\operatorname{Ar\,ch} \frac{1}{2}$. $\left[\pm \frac{\pi}{3} i + 2k\pi i\right]$.

Taj zadatak bio je već prije riješen prema II formuli sustava (18).

7. Opća eksponencijalna funkcija

Već nam je poznata eksponencijalna funkcija kompleksne promjenljive kojoj je baza realni broj e. Opća eksponencijalna funkcija ima i u bazi kompleksni broj $z = x + iy$ pa glasi

$$w = z^a$$

gdje je $a = \alpha + \beta i$ bio koji kompleksni broj.

Kako svaki broj z možemo prikazati u obliku $z = e^{\mathrm{Ln}\, z}$, jer logaritmiranje daje identitet $\mathrm{Ln}\, z = \mathrm{Ln}\, z$, uzimamo w u obliku

$$w = e^{\mathrm{Ln}\, z^a} = e^{a\, \mathrm{Ln}\, z}. \tag{22}$$

Neka je $z = r\, e^{i\varphi}$, gdje je $(-\pi < \varphi < \pi)$. Tada je

$$w = e^{a\, \mathrm{Ln}\, r e^{i\varphi}} = e^{a[\ln r + i(\varphi + 2k\pi)]} \tag{22$'$}$$

prema (14).

Uvrštenje $a = \alpha + i\beta$ daje opću eksponencijalnu funkciju u obliku

$$w = e^{(\alpha + i\beta)[\ln r + i(\varphi + 2k\pi)]} = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)} \cdot e^{i[\beta \ln r + \alpha(\varphi + 2k\pi)]} \tag{22$''$}$$

gdje je $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Primjeri

Izračunaj:

1. i^i.

Prema (22) imamo, uzevši u obzir da je $a = i$, jer je $\beta = 0$, dok je $z = i$:

$$i^i = e^{i\, \mathrm{Ln}\, i} = e^{i\left[\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right]} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = \underline{e^{-(4k+1)\frac{\pi}{2}}}.$$

Vidimo da i^i ima beskonačno mnogo *realnih* vrijednosti.

2. 3^{2+i}.

Prema (22) uzevši u obzir da je $z = 3$, dok je $a = 2 + i$:

$$3^{2+i} = e^{(2+i)\mathrm{Ln}\, 3} = e^{(2+i)\cdot[\ln 3 + i(0 + 2k\pi)]} = e^{(2\ln 3 - 2k\pi) + i(\ln 3 + 4k\pi)} = e^{2\ln 3 - 2k\pi} \cdot e^{i(\ln 3 + 4k\pi)} =$$
$$= \underline{e^{2\ln 3 - 2k\pi} \cdot (\cos \ln 3 + i \sin \ln 3)}.$$

3. i^{1+i}.

Prema (22) dobivamo uzevši $z = i$ i $a = 1 + i$:

$$i^{1+i} = e^{(1+i)\mathrm{Ln}\, i} = e^{(1+i)\left[\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right]} = e^{(1+i)\cdot i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} =$$
$$= (e^i)^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \cdot e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = \underline{i\, e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}}, \text{ jer je } e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i.$$

Pokus: $i^{1+i} = i^1 \cdot i^i = [\text{prema zadatku 1}] = \underline{i\, e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}}$.

4. $(1 + i)^i$.

Kako je sad $z = 1 + i$ i $a = i$, prema (22) dobivamo:

$$(1 + i)^i = e^{i\mathrm{Ln}(1+i)}\left[r = \sqrt{2},\ \varphi = \mathrm{arc\,tg}\, 1 = \frac{\pi}{4}\right] = e^{i\left[\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right]} =$$
$$= e^{i \ln\sqrt{2}} \cdot e^{-\pi\left(2k + \frac{1}{4}\right)} = \underline{e^{-\pi\left(2k + \frac{1}{4}\right)}(\cos \ln\sqrt{2} + i \sin \ln\sqrt{2})}.$$

5. $(-1)^{\sqrt{2}}$.

Za $z = -1$ i $a = \sqrt{2}$ prema (22) dobivamo:

$$(-1)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\mathrm{Ln}(-1)} = e^{\sqrt{2}[\ln 1 + i(\pi + 2k\pi)]} = e^{\sqrt{2}\cdot i\pi(2k+1)} =$$
$$= \underline{\cos(2k+1)\pi\sqrt{2} + i \sin(2k+1)\pi\sqrt{2}}.$$

6. 4^i. $[e^{-2k\pi}(\cos \ln 4 + i \sin \ln 4)]$.

7. 10^i.

$$10^i = e^{\ln 10^i} = e^{i \ln 10} = e^{i\frac{1}{M}}\left[\text{tu je } \frac{1}{M} \doteq 2{,}3026 \text{ modul prirodnih logaritama}\right] =$$
$$= \cos\left(\frac{1}{M}\right) + i \sin\left(\frac{1}{M}\right) \doteq \cos 2{,}3026 + i \sin 2{,}3026 \doteq \cos 131°56' + i \sin 131°56' =$$
$$\doteq \underline{-0{,}6680 + i\, 0{,}7440}.$$

8. 10^{2+1}. $[-66{,}80 + 74{,}40i]$.

9. $(-10)^{\frac{i}{2}}$. $[(0{,}084 + 0{,}189i)\, e^{k\pi}]$.

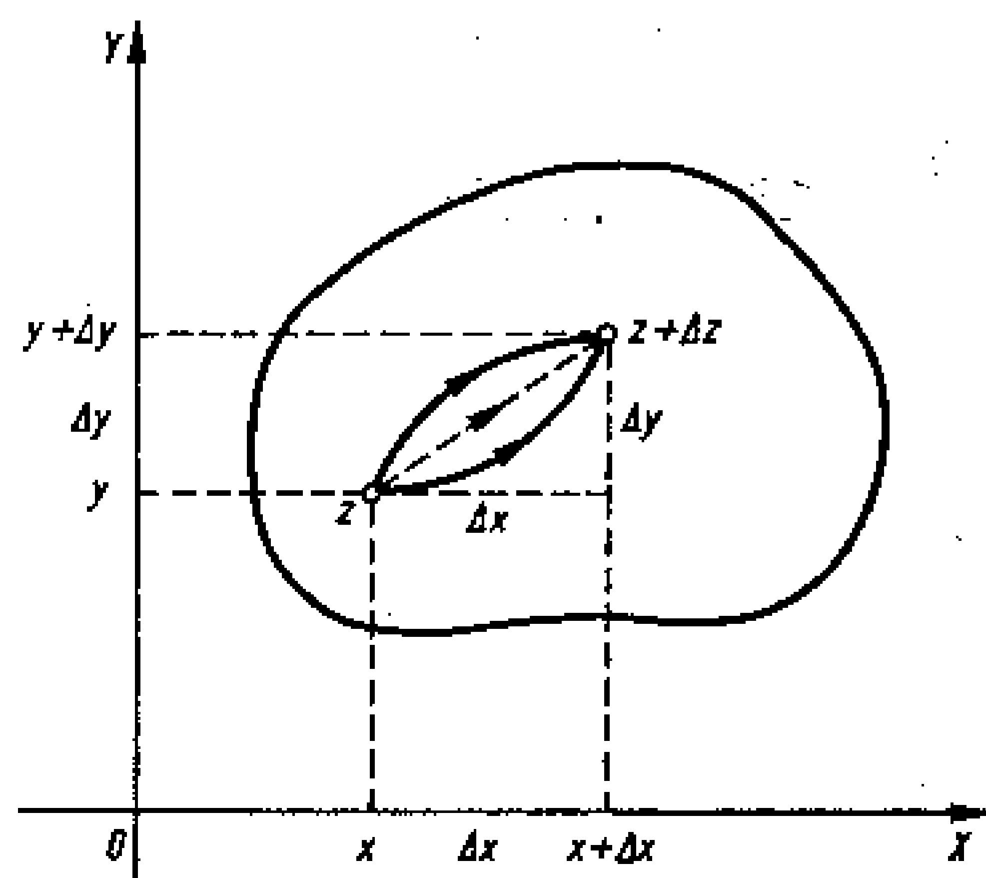
§ 6. DERIVACIJA I DIFERENCIJAL FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMJENLJIVE. CAUCHY-RIEMANNOVE PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE. ANALITIČKE FUNKCIJE

Znamo da je promjenljiva $w = f(z)$ funkcija kompleksnog broja z, ako svakoj vrijednosti z odgovara određena vrijednost funkcije $f(z)$. Kako je $z = x + iy$, gdje je x realni dio, a y imaginarni dio kompleksnog broja, zadati z znači zadati dva realna broja x i y, pri čemu je

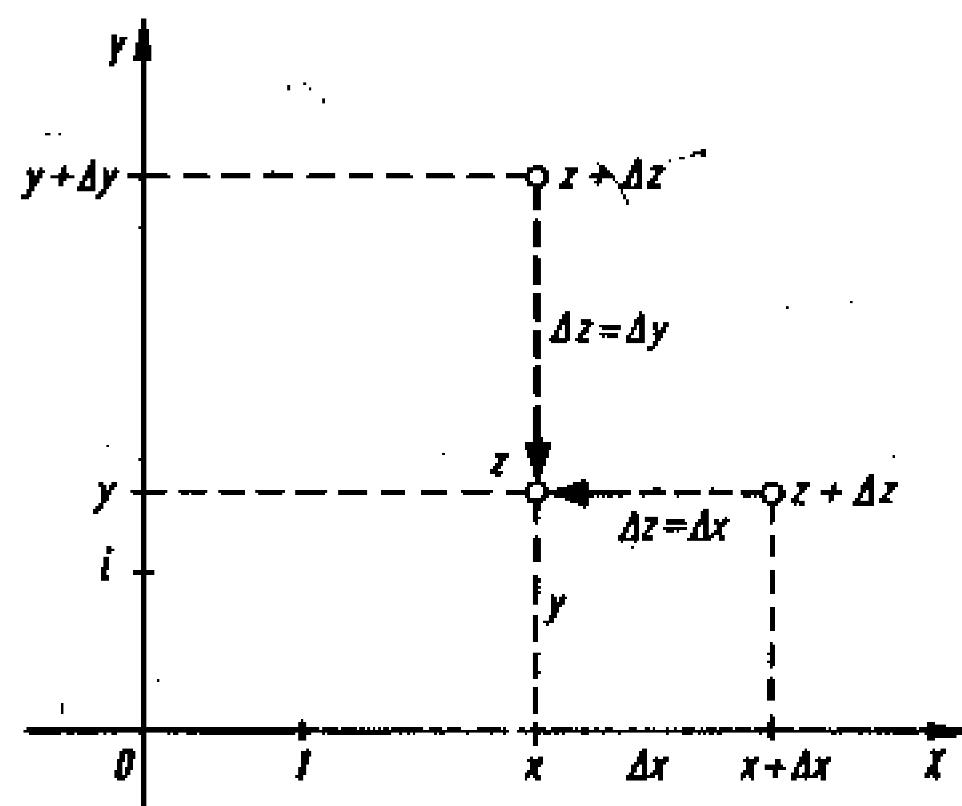
$$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y). \tag{23}$$

gdje su u i v realne funkcije.

Svakom z odgovaraju određene vrijednosti u i v, pa i određena vrijednost $f(z)$.



Slika 24.



Slika 25.

Neka je jednoznačna funkcija $w = f(z)$ određena u nekom konačnom okolišu točke z u konačnosti. Izaberimo u tom okolišu točku $z + \Delta z$ i neka je Δw prirast funkcije $f(z)$ pri prelazu od točke z u točku $z + \Delta z$, tj.

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z).$$

Vidi sl. 24.

Ako postoji konačni limes omjera $\frac{\Delta w}{\Delta z}$, kad $\Delta z \to 0$, tada kažemo da funkcija $f(z)$ ima derivaciju u točki z pa limes tog omjera zovemo derivacijom funkcije $f(z)$ u točki z i označujemo ga simbolički kao u realnom području s

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \tag{23)'$$

Kad z dobije prirast Δz, x dobija prirast Δx, y prirast Δy (vidi sl. 24), a w prirast

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) = [u(x + \Delta x, y + \Delta y) + i\,v(x + \Delta x, y + \Delta y)] - \\ - [u(x, y) + i\,v(x, y)] = \Delta u + i\,\Delta v,$$

gdje je

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y),$$
$$\Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y).$$

Formulu (23)' možemo sad napisati u obliku

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u + i\,\Delta v}{\Delta x + i\,\Delta y} \tag{24}$$

Omjer $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ kad $\Delta z \to 0$ može težiti konačnom limesu samo **uz uvjet, da** i $\Delta w \to 0$, a to je kao u realnom području uvjet neprekinutosti funkcije $f(z)$ u točki z. Dakle iz egzistencije derivacije $f'(z)$ funkcije $f(z)$ u točki z slijedi *neprekinutost* te funkcije u toj točki z.

Kao i u realnom području obrat ne vrijedi. Izvedimo nužne i dovoljne uvjete koje mora zadovoljavati funkcija $f(z)$ da ima derivaciju u točki $z = x + iy$.

Egzistencija derivacije funkcije kompleksne promjenljive nije tako očigledna i jednostavna kao u slučaju realne promjenljive. Kako se vidi na slici 24 Δz može težiti nuli na bezbroj načina, tj. u bilo kojem smjeru prema točki z, dok $\Delta x \to 0$ samo u smjeru osi x.

Samo u tom slučaju, ako postoji limes kvocijenta diferencija $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ makako bi Δz težio prema nuli, kaže se da funkcija $w = f(z)$ ima u točki z derivaciju, pri čemu taj limes mora biti jedinstven za sve putove kojim bi Δz težio prema nuli.

Ako taj uvjet nije ispunjen, kaže se da funkcija $w = f(z)$ nema derivacije.

Izvedimo analitičke uvjete uz koje zadana funkcija $w = f(z)$ ima derivaciju u zadanoj točki z.

Kako vrijednost $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ ne smije ovisiti o putu kojim Δz teži nuli, moramo za derivaciju funkcije $f(z)$ dobiti istu vrijednost, ako pustimo da $\Delta z \to 0$:

1) paralelno s realnom osi X i

2) paralelno s imaginarnom osi Y.

Kako se vidi na slici 25 u slučaju 1) kad $\Delta z \to 0$ paralelno s osi X, y je konstantan, pa je $\Delta y = 0$, dok je

$$\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y = \Delta x,$$

pa prema (24) imamo:

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\,\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (25)$$

U slučaju 2) kad $\Delta z \to 0$ paralelno s osi Y, x je konstanta, pa je $\Delta x = 0$, dok je $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y = i\,\Delta y$. Vidi sl. 25.

Prema formuli (24) imamo:

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\,\Delta v}{i\,\Delta y} = \frac{1}{i} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} + \frac{i}{i} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (25)'$$

Budući da smo pretpostavili da derivacija $f'(z)$ postoji, iz formula (25) slijedi egzistencija parcijalnih derivacija funkcija u i v.

Međutim vrijednost derivacije, tj. vrijednost $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$, ne smije ovisiti o putu kojim Δz teži nuli, te oba izraza (25) za $f'(z)$ moraju biti jednaka, da funkcija $f(z)$ ima derivaciju u točki z, tj. mora biti

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y},$$

a odatle slijedi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (26)$$

To su **Cauchy-Riemannove parcijalne diferencijalne jednadžbe.**

Ako postoji derivacija funkcije $w = f(z)$ po z u točki z, realni i imaginarni dio funkcije w, tj. $u(x, y)$ i $v(x, y)$ moraju zadovoljavati Cauchy-Riemannove parcijalne diferencijalne jednadžbe. To je *nužni uvjet* da funkcija kompleksne promjenljive z ima derivaciju u točki z.

Taj uvjet je i *dovoljan* ukoliko su parcijalne derivacije, koje ulaze u Cauchy-Riemannove diferencijalne jednadžbe, neprekinute u promatranom području.

Jednoznačna funkcija $f(z)$ koja ima konačnu određenu derivaciju u svakoj točki područja D zove se *analitička* funkcija u tom području D (također *regularna* ili *holomorfna*).

Spomenimo još da se funkcija $f(z)$ zove analitička u točki z u konačnosti, ako je ona analitička u nekom okolišu točke z.

Točke ravnine z u kojim je jednoznačna funkcija $f(z)$ analitička, zovu se *pravilne* (*regularne*) *točke funkcije z*, dok točke u kojim funkcija $f(z)$ nije analitička, zovu se *posebne* (*singularne*) *točke* te funkcije.

Budući da smo derivaciju funkcije kompleksne promjenljive definirali formalno kao u realnom području, za funkciju kompleksne promjenljive vrijede poznata pravila diferenciranja iz realnog područja:

$$\{f(z) \pm g(z)\}' = f'(z) \pm g'(z).$$

$$\{f(z) \cdot g(z)\}' = f(z) \cdot g'(z) + g(z) \cdot f'(z).$$

$$\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\}' = \frac{g(z) \cdot f'(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)}, \quad g(z) \neq 0.$$

$$\{f[g(z)]\}' = f'[g(z)] \cdot g'(z).$$

$f'(z) = \frac{1}{\varphi'(w)}$, ako je $w = f(z)$, dok je $z = \varphi(w)$, tj. w i z su uzajamno inverzne funkcije.

Promotrimo pojedine funkcije kompleksne promjenljive z s obzirom na derivaciju.

1. $w = z^2$.

Kako je $z^2 = (x + i\,y)^2 = (x^2 - y^2) + i\,2\,x\,y$, bit će

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{i} \quad v(x, y) = 2\,x\,y. \qquad (a)$$

Da li ima ta funkcija derivaciju? Primijenimo Cauchy-Riemannove jednadžbe (26):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2\,x; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2\,y.$$

Funkcije u i v zadovoljavaju Cauchy-Riemannove diferencijalne jednadžbe u svim točkama ravnine z, pa jednoznačna funkcija $w = z^2$ ima derivaciju u svim točkama te ravnine, ona je dakle *analitička funkcija* u čitavoj ravnini z.

Odredimo prema (24) njenu derivaciju:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \frac{2\,z\,\Delta z + \Delta z^2}{\Delta z} = 2\,z + \Delta z,$$

a odatle je $\lim_{\Delta z \to 0} (2\,z + \Delta z) = 2\,z$, pa je

$$w' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = 2\,z.$$

Derivacije funkcija možemo računati i prema formulama (25). Za naš slučaj: Prema (25):

$$(z^2)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = [\text{prema (a)}] = 2\,x + i\,2\,y = \underline{2\,z},$$

prema (25)':

$$(z^2)' = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 2x + i\,2y = \underline{2z}.$$

Na isti način može se dokazati da je funkcija $w = z^k$, gdje je n realan broj, analitička u čitavoj ravnini z i izračunati njenu derivaciju:

$$w' = n\,z^{n-1}.$$

Pokažimo to npr. za funkciju $w = z^4$.

$$w = z^4 = (x + iy)^4 = x^4 + 4\,i\,x^3y - 6\,x^2y^2 - 4\,i\,x\,y^3 + y^4,$$

pa je

$$u(x,y) = x^4 - 6\,x^2y^2 + y^4; \qquad v(x,y) = 4x^3y - 4\,x\,y^3.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 4\,x^3 - 12\,x\,y^2; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -12\,x^2y + 4\,y^3.$$

Prema formulama (25) dobivamo: $w' = 4\,x^3 - 12\,x\,y^2 + i\,(12\,x^2y - 4\,y^3)$, a također prema $w' = \frac{dw}{dz} = 4\,z^3 = 4\,(x+iy)^3$ imamo isti rezultat.

2. Promotrimo funkciju

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x\cos y + i\,e^x\sin y.$$

Za tu funkciju imamo:

$$u = e^x\cos y \quad \text{i} \quad v = e^x\sin y.$$

Računamo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x\sin y. \qquad \text{(a)}$$

Slijedi: funkcija $w = e^z$ zadovoljava Cauchy-Riemannove diferencijalne jednadžbe pa ima derivaciju u svim točkama ravnine z, dakle je analitička funkcija u čitavoj ravnini z.

Odredimo $w' = (e^z)'$ po formulama (25).

$$w' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \text{[prema (a)]} = e^x\cos y + i\,e^x\sin y = e^x(\cos y + i\sin y) =$$

$$= e^x e^{iy} = e^{x+iy} = \underline{e^z}.$$

$$w' = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = e^x\cos y + i\,e^x\sin y = e^x(\cos y + i\sin y) = \underline{e^z}.$$

3. Funkcije $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ i $\operatorname{ch} z$ su linearne kombinacije funkcija e^z i e^{-z} pa su analitičke funkcije u čitavoj ravnini z.

4. Funkcije $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{cth} z$ i $\operatorname{th} z$ analitičke su funkcije u svim točkama u kojima su definirane.

Formule deriviranja svih tih funkcija ne razlikuju se od pripadnih formula realnog područja*)

5. Promotrimo funkciju $w = z\,\mathcal{R}(z)$.

Kako je $w = z\,\mathcal{R}(z) = (x + iy)\,x = x^2 + i\,x\,y$, dobivamo, uzevši u obzir, da je $u = x^2$ i $v = x\,y$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\,x; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0; \qquad -\frac{\partial v}{\partial x} = -y.$$

Vidimo da Cauchy-Riemannovi uvjeti nisu ispunjeni, osim u točki $z = 0$, tj. za $x = 0$ i $y = 0$, pa zadana funkcija ima derivaciju samo u toj točki. Međutim, ta funkcija nigdje nije analitička, čak ni u točki $z = 0$, jer *u okolišu* te točke funkcija nema derivacije.

6. Pokaži da funkcija $w = \bar{z} = x - i\,y$ nema derivacije, pa nije analitička niti u jednoj točki ravnine z.

7. Promotrimo funkciju $w = \frac{|z|}{z}$.

$$w = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+iy} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}\cdot(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

pa je

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{i} \quad v = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Računamo parcijalne derivacije u i v po x i po y.

Dobivamo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{x\,y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

*) Vidi npr. Repetitorij više matematike, Dio I, § 10.

Dakle, samo jedan od Cauchy-Riemannovih uvjeta je zadovoljen i $\frac{|z|}{z}$ nije analitička funkcija.

8. Pokaži da funkcija $w = \frac{z}{\bar{z}}$ nema derivacije pa nije analitička.

9. Pokaži da je funkcija $w = \frac{1}{z}$ analitička u cijeloj ravnini z osim točke $z = 0$, dok funkcija $w = \frac{|z|^2}{z}$ nije analitička.

10. Promotrimo još nekoliko funkcija s obzirom na derivacije:

1) $w = \ln z$.

Prelazimo na eksponencijalni oblik promjenljive $z = x + iy$:

$$w = \ln(r \cdot e^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi \ln e = \ln r + i\varphi,$$

pa je $u = \ln r$ i $v = \varphi$, a kako je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, dok je $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$, dobivamo $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

Parcijalne derivacije glase:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \underline{\frac{x}{x^2 + y^2}}; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \underline{\frac{x}{x^2 + y^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \underline{\frac{y}{x^2 + y^2}}; \qquad -\frac{\partial v}{\partial x} = \underline{\frac{y}{x^2 + y^2}}.$$

Funkcija je analitička u svim točkama ravnine z osim točke $z = 0$, gdje nije definirana.

2) $w = \operatorname{sh} z$.

Malo prije smo rekli da je ta funkcija analitička, jer je linearna kombinacija funkcija e^z i e^{-z}. Pokažimo to sad neposredno.

Prema formuli (20)

$$w = \operatorname{sh}(x + iy) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch}(iy) + \operatorname{ch} x \operatorname{sh}(iy),$$

a prema (19)′ imamo $\operatorname{ch}(iy) = \cos y$ i $\operatorname{sh}(iy) = i \sin y$, pa je

$$w = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y.$$

Računamo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{ch} x \cos y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\operatorname{sh} x \sin y.$$

Pokaži isto za funkciju $w = \operatorname{ch} x$.

Cauchy-Riemannove diferencijalne jednadžbe možemo izraziti i u *polarnim koordinatama* uzevši $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, odnosno $z = r\,e^{i\varphi}$*). One glase:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}. \qquad (27)$$

Primjeri

Pomoću formula (27) pokaži da su zadane funkcije analitičke.

1. $w = \ln z$.

$w = \ln(r \cdot e^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$

$u = \ln r, \quad v = \varphi.$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \underline{\frac{1}{r}}; \qquad \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \underline{\frac{1}{r}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \underline{0}; \qquad -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r} \cdot 0 = \underline{0}.$$

2. $w = \sqrt{z}$.

$$w = \sqrt{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2} + i\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

$u = \sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}; \quad v = \sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}.$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\varphi}{2}.$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

3. $w = \ln^2 z$. $\left[\frac{2\ln r}{r}; \ \frac{2\varphi}{r}\right]$.

Izračunaj za vježbu derivacije zadanih funkcija kompleksne promjenljive z.

1. $e^{\operatorname{ch} z}$. 2. $\sin(2e^z)$. 3. $\sin z \operatorname{ch} z - i\cos z \operatorname{sh} z$. 4. $z\,e^{-z}$.
5. $\frac{e^z}{z}$. 6. $\frac{e^z + 1}{e^z - 1}$. 7. $(e^z - e^{-z})^{-2}$. 8. $\frac{\cos z}{\cos z - \sin z}$.

[1. $\operatorname{sh} z\, e^{\operatorname{ch} z}$. 2. $2e^z\cos(2e^z)$. 3. $(1 - i)\cos z \operatorname{ch} z + (1 + i)\sin z \operatorname{sh} z$.
4. $(1 - z)e^{-z}$. 5. $\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right)e^z$. 6. $\frac{2e^z}{(e^z - 1)^2}$. 7. $-2\frac{e^z + e^{-z}}{(e^z - e^{-z})^3}$.
8. $\frac{1}{(\cos z - \sin z)^2}$].

---

*) Vidi Repetitorij više matematike, Dio III, § 4.10. Tu je izvedena i Laplaceova parcijalna diferencijalna jednadžba u polarnim koordinatama.

§ 7. LAPLACEOVA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA. HARMONIČKE FUNKCIJE

Cauchy-Riemannove diferencijalne jednadžbe funkcije

$$w = f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

derivirajmo prvu po x, a drugu po y, pa dobivene jednadžbe zbrojimo. Dobivamo:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\end{aligned}\right| +$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ili} \quad \Delta u = 0. \tag{28}$$

Deriviramo li prvu jednadžbu po y, a drugu po x, pa drugu jednadžbu odbijemo od prve, dobit ćemo

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ili} \quad \Delta v = 0. \tag{28'}$$

Vidimo da realni dio $u(x, y)$ i imaginarni dio $v(x, y)$ analitičke funkcije $w = u(x, y) + i\,v(x, y)$ zadovoljavaju jednu te istu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda koja se zove *Laplaceova jednadžba* ili *jednadžba potencijala.*

Primijetimo da uvjeti $\Delta u = 0$ i $\Delta v = 0$ nisu dovoljni za analitičnost funkcije $w = f(z)$, jer svaki par rješenja Laplaceove jednadžbe ne mora zadovoljavati Cauchy-Riemannove jednadžbe.

Funkcije $u(x, y)$ i $v(x, y)$, koje zadovoljavaju Laplaceovu jednadžbu, zovu se *harmoničke funkcije*, dok realni dio $u(x, y)$ i imaginarni dio $v(x, y)$ analitičke funkcije w, čine par *konjugirano harmoničkih funkcija.*

Iz navedenog slijedi, da za realni dio i za imaginarni dio analitičke funkcije ne možemo uzeti bilo koje funkcije, već samo uzajamno konjugirane harmoničke funkcije.

U pređašnjem § 6 dokazali smo za više funkcija da su analitičke, jer njihovi dijelovi, realni $u(x, y)$ i imaginarni $v(x, y)$, zadovoljavaju Cauchy-Riemannove diferencijalne jednadžbe. Pokaži da $u(x, y)$ i $v(x, y)$ tih funkcija zadovoljavaju i Laplaceovu jednadžbu.

Npr. u točki 2. pokazali smo da je $w = e^z$ analitička funkcija, pri čemu smo izračunali prve parcijalne derivacije funkcija $u = e^x \cos y$ i $v = e^x \sin y$ po x i po y:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y; \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

Računajmo druge parcijalne derivacije i to prvog para po x, a drugog po y. Dobivamo:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= e^x \cos y; & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= e^x \sin y\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -e^x \cos y; & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -e^x \sin y\end{aligned}\right| +$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Vidimo da su funkcije $u = e^x \cos y$ i $v = e^x \sin y$ uzajamno konjugirane harmoničke funkcije, jer zadovoljavaju Laplaceovu diferencijalnu jednadžbu i tvore realni i imaginarni dio analitičke funkcije.

Budući da realni i imaginarni dio analitičke funkcije čine samo uzajamno konjugirane harmoničke funkcije, možemo uvijek konstruirati analitičku funkciju $w = f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, ako je zadana harmonička funkcija, koja je realni dio $u(x, y)$ funkcije $f(z)$ ili njen imaginarni dio $v(x, y)$.

Neka, na primjer, zadana harmonička funkcija $u(x, y)$ čini realni dio neke analitičke funkcije $f(z)$. Harmoničku funkciju $v(x, y)$, koja je konjugirana prema zadanoj funkciji $u(x, y)$, možemo odrediti pomoću Cauchy-Riemannovih diferencijalnih jednadžbi (26):

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{26}$$

ili, što je isto, pomoću totalnog diferencijala funkcije $v(x, y)$:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy,$$

gdje su zbog (26) $\frac{\partial v}{\partial x}$ i $\frac{\partial v}{\partial y}$ poznate funkcije, koje zbog Laplaceove jednadžbe za u zadovoljavaju uvjete za totalni diferencijal.

Prema tome određivanje harmoničke funkcije, koja je konjugirana s obzirom na zadanu, svodi se na integriranje totalnog diferencijala funkcije dviju promjenljivih, odnosno na operaciju iz realnog područja.

Navedimo nekoliko primjera.

Primjeri

Konstruiraj analitičku funkciju $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ kojoj je zadan:

1. Realni dio $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

Zadana funkcija $u(x,y)$ je harmonička, jer zadovoljava Laplaceovu jednadžbu:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2; & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -6xy; & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x \end{array}\right| + \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Pomoću jednadžbi (26) odredimo $v(x,y)$ tražene funkcije $w = f(z)$:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy, \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2. \qquad \text{(b)}$$

Sad integrirajmo (a) po x smatrajući da je $y = \text{const.}$:

$$dv = 6xy\,dx$$

pa je

$$v = 6y \int x\,dx = 3x^2y + \varphi(y),$$

gdje je $\varphi(y)$ bilo koja funkcija od y.

Da je odredimo, derivirajmo dobiveni izraz za v po y:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 + \varphi(y),$$

a uvrštenje u (b) daje

$$3x^2 + \varphi'(y) = 3x^2 - 3y^2 \quad \text{ili} \quad \frac{d\varphi}{dy} = -3y^2$$

Odatle je

$$\varphi(y) = -3\int y^2\,dy + C = -y^3 + C.$$

Uvrštenje u $v = -3x^2y + \varphi(y)$ daje konačno:

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 + C.$$

Tražena funkcija $w = f(z) = u + iv$ glasi:

$$\underline{f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) + iC = z^3 + iC,}$$

jer je $z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2iy - 3xy^2 - iy^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$.

2. Realni dio $u(x,y) = x + x^2 - y^2$ uz uvjet $f(0) = 0$.

Zadana funkcija $u(x,y)$ je harmonička, jer je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0. \quad \text{Pokaži to!}$$

Prema Cauchy-Riemannovim jednadžbama imamo:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 1 + 2x. \qquad \text{(b)}$$

Jednadžbu (b) integrirajmo po y smatrajući da je $x = \text{const.}$:

$$dv = (1 + 2x)\,dy; \quad v = \int (1 + 2x)\,dy + \varphi(x) = (1 + 2x)y + \varphi(x);$$

$$\varphi(x) = ? \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x),$$

a kako je prema (a) $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y$, dobivamo $\varphi'(x) = 0$, pa je $\varphi(x) = C$, gdje je C **konstanta** po volji.

Imamo $v = (1 + 2x)y + C$, pa tražena funkcija $f(z)$ glasi:

$$f(z) = x + x^2 - y^2 + i(y + 2xy + C).$$

Kako je prema uvjetu $f(0) = 0$, tj. $z = x + iy = 0$, pa je $x = 0$ i $y = 0$, dobivamo $0 = iC$, slijedi $C = 0$.

$$\underline{f(z) = x + x^2 - y^2 + i(y + 2xy) = z + z^2.}$$

3. Imaginarni dio $v(x,y) = x^2 - y^2 - 1$ uz uvjet $f(-1) = 0$.

Zadana funkcija $v(x,y)$ je harmonička, jer je

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0.$$

Prema Cauchy-Riemannovim jednadžbama imamo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2y, \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2x. \qquad \text{(b)}$$

Prema (a): $du = -2y\,dx$, pa uz $y = \text{const.}$ dobivamo:

$$u = -2\int y\,dx + \varphi(y) = -2yx + \varphi(y). \qquad \text{(c)}$$

Prema (c): $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2x + \varphi'(y)$, a uvrštenje u (b) daje $\varphi'(y) = 0$, pa je $\varphi(y) = C$, dok je $u = -2xy + C$.

Tražena analitička funkcija glasi:

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) = \underline{(-2xy + C) + i(x^2 - y^2 - 1).}$$

Kako je $x^2 - y^2 = z^2 - i\,2\,x\,y$, $f(z)$ možemo napisati u obliku:

$$f(z) = -2\,x\,y + C + i\,(z^2 - i\,2\,x\,y - 1) = -2\,x\,y + 2\,x\,y + C + i\,(z^2 - 1) =$$
$$= C + i\,(z^2 - 1).$$

Da odredimo C, iskoristimo zadani uvjet $f(-1) = 0$:

$$f(-1)\,C + i \cdot 0 = 0, \quad \text{pa je} \quad C = 0.$$

$$\underline{z = i\,(z^2 - 1).}$$

4. Realni dio $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2\,x$. $[f(z) = z^2 + 2\,z + i\,C]$.

5. Imaginarni dio $v(x,y) = x^3 - 3\,x\,y^2$ uz uvjet $f(i) = i$. $[f(z) = i\,z^3 + i - 1]$.

6. Realni dio $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - 2\,y$ uz uvjet $f(1) = 0$. $\left[f(z) = \dfrac{1}{z} + 2\,i\,z - 2\,i - 1\right]$.

7. Realni dio $u(x,y) = x\,y$. $\left[v = -\dfrac{1}{2}(x^2 + y^2) + C,\ v = -\dfrac{1}{2}(x^2 - y^2) + C\right]$.

8. Na kraju riješimo još jedan primjer i to u *polarnim koordinatama*:
Realni dio $u(\varphi, r) = r\,\varphi\cos\varphi + r\ln r\sin\varphi$.

Zadana funkcija $u(\varphi, r)$ je harmonička, jer zadovoljava Laplaceovu jednadžbu, koja u polarnim koordinatama glasi:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

Pokaži to!

Prema Cauchy-Riemannovim diferencijalnim jednadžbama (27)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

imamo:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{r}{r}(-\varphi\sin\varphi + \cos\varphi + \ln r \cdot \cos\varphi) = \varphi\sin\varphi - \cos\varphi - \ln r \cdot \cos\varphi, \quad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = r\,\frac{\partial u}{\partial r} = r\left[\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\left(r \cdot \frac{1}{r} + \ln r\right)\right] = r\,(\varphi\cos\varphi + \sin\varphi \cdot \ln r). \quad \text{(b)}$$

Sad integrirajmo (a) po r smatrajući da je $\varphi = \text{const.}$

$$v = r\,\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\,(r + r\ln r - r) + F(\varphi)$$

ili

$$v = r\,\varphi\sin\varphi - r\cos\varphi\ln r + F(\varphi) \quad \text{(c)}$$

(c) parcijalno derivirajmo po φ:

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = r\,(\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\ln r) + F'(\varphi).$$

Uvrštenje u (b) daje: $F'(\varphi) = 0$, pa je $F(\varphi) = C$, dok je prema (c):

$$v = r\,\varphi\sin\varphi - r\ln r\cos\varphi + C.$$

$$\underline{w = (r\,\varphi\cos\varphi + r\ln r\sin\varphi) + i\,(r\,\varphi\sin\varphi - r\ln r\cos\varphi + C) = -i\,z\ln z.}$$

§ 8. GEOMETRIJSKO ZNAČENJE ANALITIČKE FUNKCIJE

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

Veza koju daju Cauchy-Riemannove diferencijalne jednadžbe za uzajamno konjugirane harmoničke funkcije $u(x,y)$ i $v(x,y)$ ima vrlo važno geometrijsko značenje.

Konstruiramo li krivulju $u(x,y) = \text{const.}$ i uzmemo li totalni diferencijal funkcije $u(x,y) = C$, dobit ćemo

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = 0,$$

a odatle slijedi da je derivacija funkcije $u(x,y)$ po x, tj.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}} = \operatorname{tg}\alpha_1. \quad \text{(a)}$$

Geometrijski taj izraz daje tangens kuta α_1 što ga tangenta na krivulju $u(x,y) = C$ u bilo kojoj točki te krivulje zatvara s + osi X.

Na isti način pomoću totalnog diferencijala funkcije $v(x,y) = \text{const.}$ $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ dobivamo tangens kuta α_2 tangente na krivulju $v(x,y) = C$ u bilo kojoj točki te krivulje

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\dfrac{\partial v}{\partial y}} = \operatorname{tg}\alpha_2.$$

Kako je prema Cauchy-Riemannovim jednadžbama

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

dobivamo

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = +\frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}} = [\text{prema (a)}] = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1}.$$

Slijedi: tangente povučene na krivulje $u(x,y) = C$ i $v(x,y) = C$ u bilo kojim sjecištima pripadnih parova tih krivulja međusobno su okomite, jer je $\operatorname{tg}(\alpha \pm 90°) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Prema tome svaka analitička funkcija $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ predočuje geometrijski dvije familije krivulja, koje se sijeku pod pravim kutom.

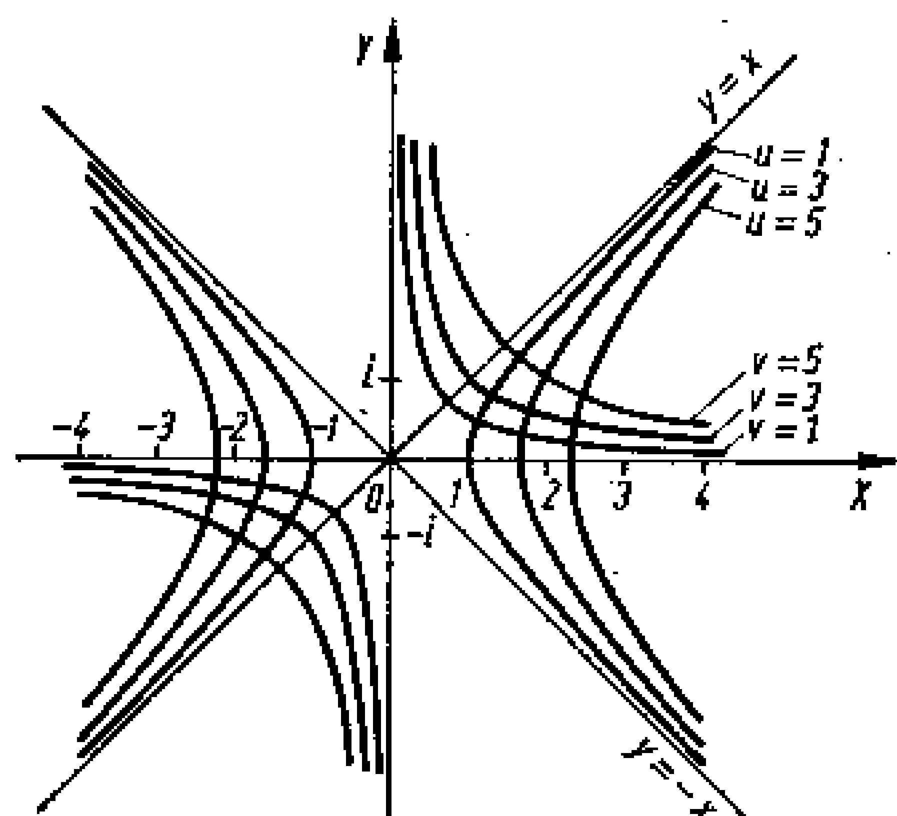
Kao primjer navedimo funkciju

$$f(z) = z^2 = (x + i\,y)^2 = (x^2 - y^2) + i\,2\,x\,y,$$

pa su $u = x^2 - y^2$ i $v = 2\,x\,y$.

Funkcija je analitička, kako smo to prije pokazali, pa su $u(x, y)$ i $v(x, y)$ uzajamno konjugirane harmoničke funkcije, dok $u = x^2 - y^2 = \text{const.}$ i $v = 2\,x\,y = \text{const.}$ predočuju grafički dvije familije istostranih hiperbola, koje se sijeku pod pravim kutom, tj. dvije familije ortogonalnih krivulja.

Kako se vidi na slici 26, $u = x^2 - y^2$ predučuje familiju hiperbola, kojim su asimptote raspolovnice I i III, odnosno II i IV kvadranta, tj. pravci $y = \pm x$, dok $v = 2\,x\,y$, odnosno $y = \frac{v}{2\,x}$ predočuje familiju hiperbola, kojim su asimptote koordinatne osi, pri čemu su za u, odnosno v uzete vrijednosti 1, 3 i 5.



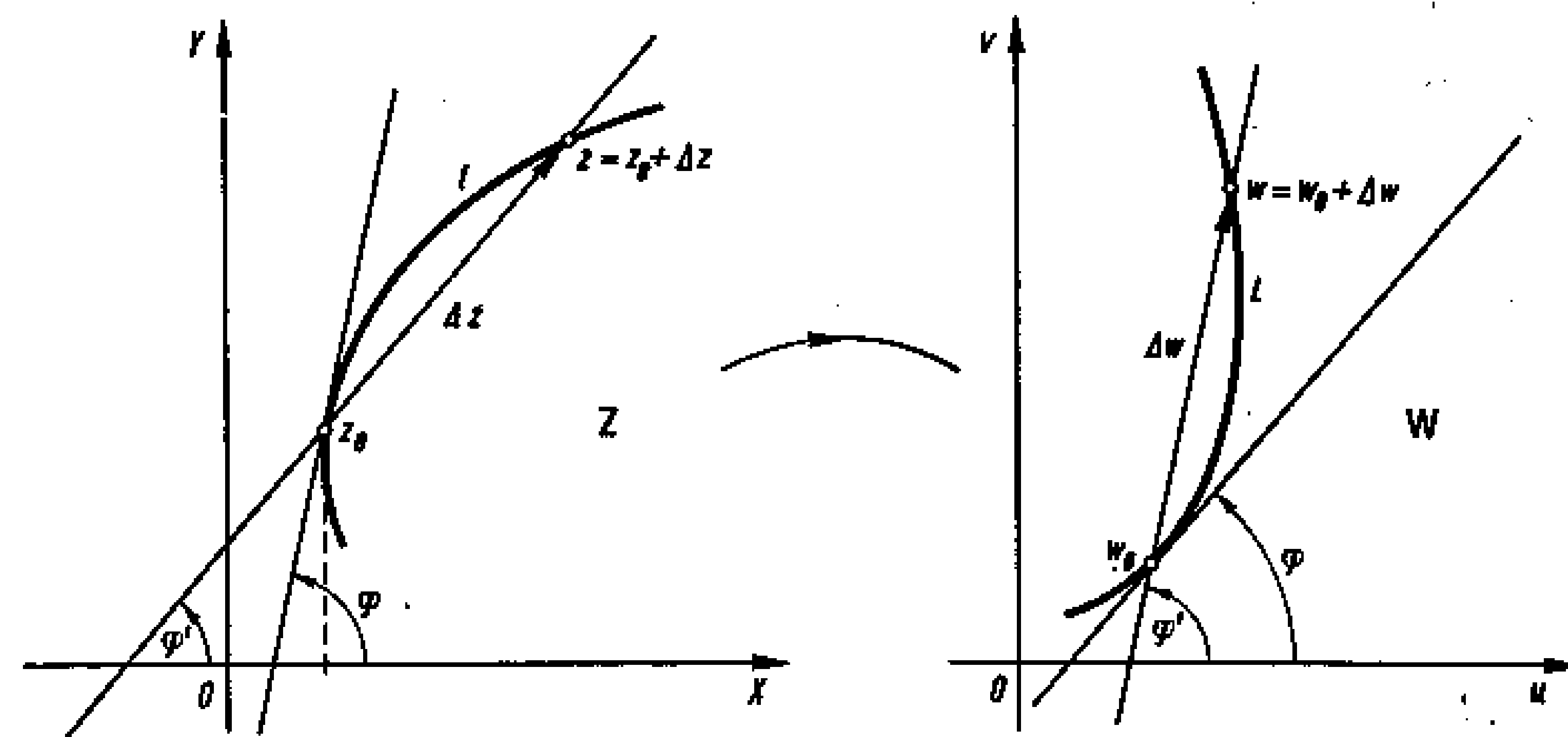
Slika 26.

Na kraju spomenimo da Laplaceova jednadžba ili jednadžba potencijala ima veliko značenje u matematičkoj fizici. Na primjer, elektrostatički potencijal u prostoru među dvama dugim vodičima povučenim okomito na ravninu XY funkcija je samo od x i y i zadovoljava Laplaceovu jednadžbu.

Uzmemo li bilo koju analitičku funkciju $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, dobit ćemo dvije familije ortogonalnih krivulja $u(x, y) = \text{const.}$ i $v(x, y) = \text{const.}$ koje se sijeku u svakoj točki pod pravim kutom. U gore navedenom primjeru $f(z) = z^2$ te su krivulje istostrane hiperbole prikazane na slici 26.

§ 9. KONFORMNO PRESLIKAVANJE

Neka je funkcija $w = f(z)$ analitička u području D, dok je z_0 neka točka u tom području, i neka je $f(z_0) \neq 0$. Funkcija $w = f(z)$ preslikat će točku z_0 ravnine z u točku $w_0 = f(z_0)$ ravnine w. Vidi sl. 27.



Slika 27.

Točkom z_0 povučemo neku krivulju l, koju će funkcija $w = f(z)$ preslikati u ravnini w kao krivulju L, koja prolazi točkom w_0. Na krivulji l uzmimo točku $Z = z_0 + \Delta z$, koja će se preslikati u točku $W = w_0 + \Delta w$ krivulje L.

Po definiciji derivacije imamo;

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{Z \to z_0} \frac{W - w_0}{Z - z_0} = f'(z_0). \tag{a}$$

Iz (a) slijedi:

$$|f'(z_0)| = \lim_{Z \to z_0} \left| \frac{W - w_0}{Z - z_0} \right| = \lim_{Z \to z_0} \frac{|W - w_0|}{|Z - z_0|}. \tag{b}$$

Vidimo da je $|f'(z_0)|$ limes omjera beskonačno male udaljenosti Δw između preslikanih točaka w_0 i W prema beskonačno maloj udaljenosti Δz između prvobitnih točaka z_0 i Z. Budući da je funkcija $f(z)$ analitička u točki z_0, oba limesa i to limes (a) i limes (b) ne ovise o načinu približavanja točke Z prema točci z_0, tj. o izboru krivulje l koja izlazi iz točke z_0. Stoga veličinu $|f'(z_0)|$ možemo geometrijski interpretirati kao ***modul*** ili ***koeficijent rastezanja u točki z_0 pri preslikavanju $w = f(z)$***, pri čemu, ako je $|f'(z_0)| > 1$, tada u dovoljno malom okolišu točke z_0 udaljenost između točaka pri preslikavanju $w = f(z)$ povećava se, pa nastaje rastezanje ravnine, dok za $|f'(z_0)| < 1$ to preslikavanje vodi k stezanju. Na taj način smo dobili koeficijent ili modul preslikavanja

$$\varrho = |f'(z_0)|. \tag{29}$$

Dalje iz (a) slijedi:

$$\operatorname{Arg} f'(z_0) = \lim_{Z\to z_0} \operatorname{Arg} \frac{W - w_0}{Z - z_0} = \lim_{Z\to z_0} [\operatorname{Arg}(W - w_0) - \operatorname{Arg}(Z - z_0)]. \qquad \text{(c)}$$

(Tu se pretpostavlja da je $f'(z_0) \neq 0$, jer inače $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ ne bi imao smisla).

Kako se vidi na slici 27, $\operatorname{Arg}(W - w_0)$ i $\operatorname{Arg}(Z - z_0)$ su kutovi Φ' i φ', što ih vektori $\Delta \mathbf{w} = W - w_0$ i $\Delta \mathbf{z} = Z - z_0$ zatvaraju s realnim osima U i X, dok su Φ i φ kutovi tangenata, povučenih na krivulje L i l u točkama w_0 i z_0, s istim osima U i X.

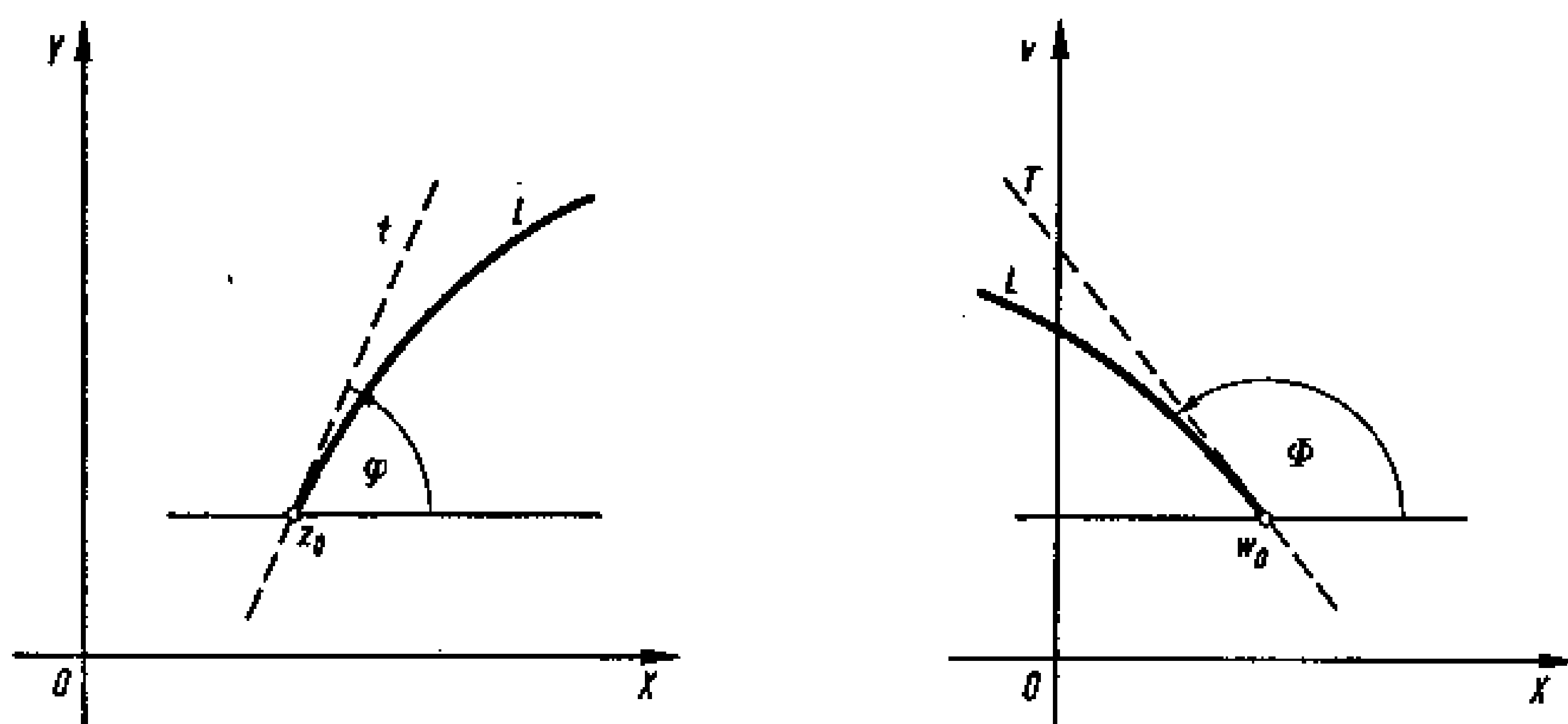
Kad $Z \to z_0$, $\varphi' \to \varphi$, a $\Phi' \to \Phi$, prema (c) imamo *kut* ψ *zaokreta tangente*

$$\psi = \operatorname{Arg} f'(z_0) = \Phi - \varphi = \operatorname{Arg} f(z_0) - \operatorname{Arg} z_0 \qquad (29)'$$

ili

$$\Phi = \varphi + \operatorname{Arg} f'(z_0).$$

Vidi sl. 28.



Slika 28.

Prema tome $\psi = \operatorname{Arg} f'(z_0)$ je kut, za koji treba zaokrenuti tangentu na krivulju l u točki z_0, da se dobije smjer tangente na krivulju L u točki w_0.

Budući da je funkcija $f(z)$ analitička u točki z_0, kut $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ isti je za sve krivulje l koje prolaze točkom z_0. Stoga se $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ zove *rotacija* pri analitičkom preslikavanju $w = f(z)$ u točki z_0.

Dakle tangente na sve krivulje, koje prolaze točkom z_0, *zaokreću se u toj točki za jedan te isti kut* $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ pri analitičkom preslikavanju $w = f(z)$ i uz uvjet da je $f'(z_0) \neq 0$.

Odatle slijedi da u točki z_0 analitička funkcija $w = f(z)$ uz uvjet da je $f'(z_0) \neq 0$, preslikava dvije krivulje po volji koje se sijeku u toj točki z_0 tako, da kut između prvobitnih i preslikanih krivulja bude jedan te isti po veličini i po smislu vrtnje (rotacije).

Prema tome analitičko preslikavanje $w = f(z)$ ima svojstvo *konzervatizma* (*čuvanja*) *kutova* u svim točkama gdje je $f'(z) \neq 0$.

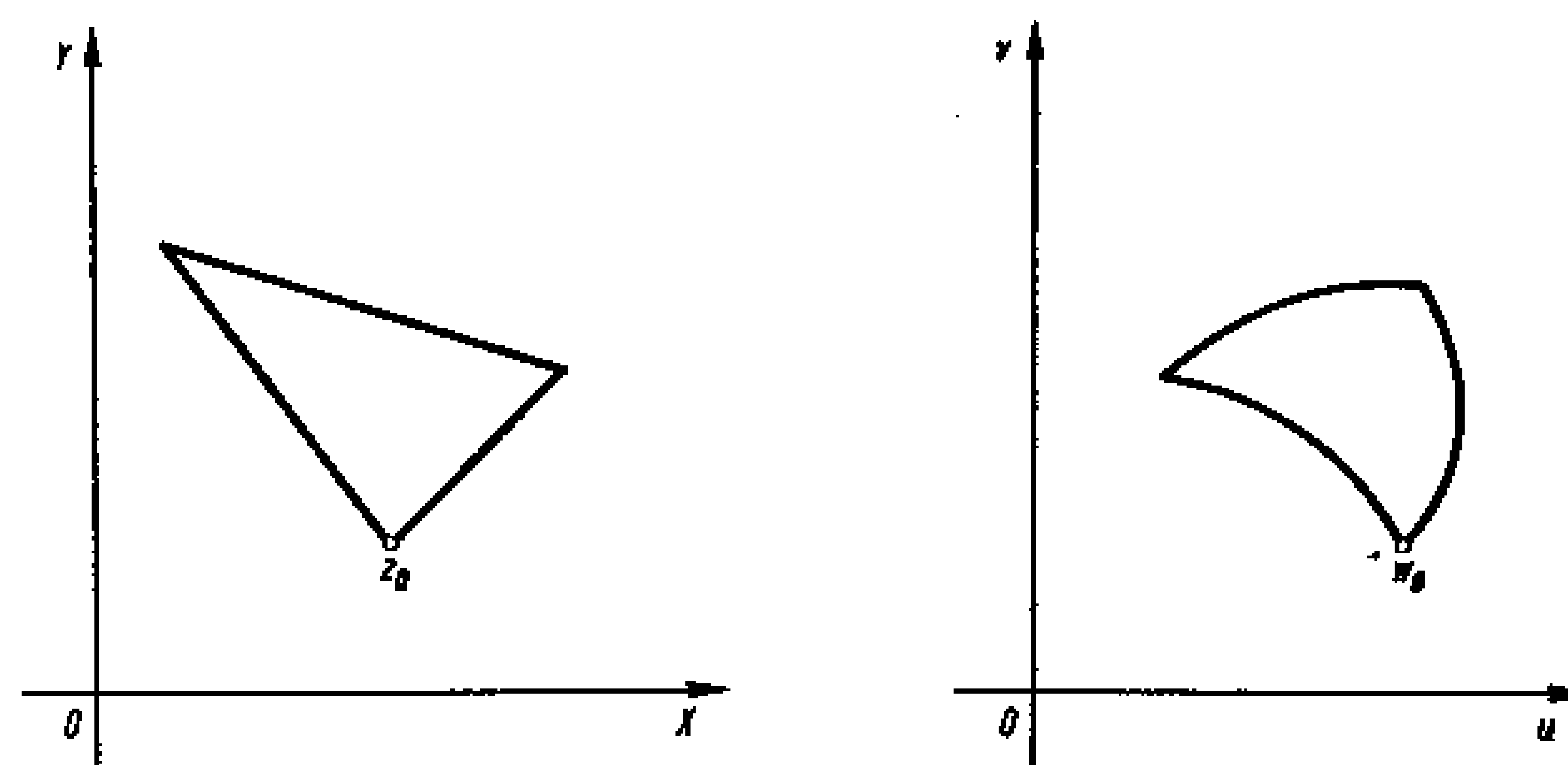
Time smo pokazali da svako analitičko preslikavanje, tj. preslikavanje što ga vrši analitička funkcija $w = f(z)$, ima u svakoj točki z_0, gdje je $f'(z_0) \neq 0$, dva svojstva

1) stalnost rastezanja, odnosno stlačivanja,

2) konzervatizam (čuvanje) kutova.

Uzmemo li u području kompleksne promjenljive z beskonačno mali lik, npr. trokut, kojemu se jedan vrh nalazi u točki z_0, njemu će u ravnini promjenljive w odgovarati beskonačno mali krivocrtni trokut s vrhom u točki w_0. Vidi sliku 29.

Pripadni kutovi u tom trokutu bit će jednaki uslijed čuvanja kutova, a omjeri pripadnih stranica bit će jednaki jednom te istom broju $|f(z_0)|$ i to s točnosti do beskonačno malih veličina, pa je analitičko preslikavanje preslikavanje sličnosti u beskonačno malim dijelovima (Gauss) i to u okolišu svake točke, u kojoj je $f'(z) \neq 0$.



Slika 29.

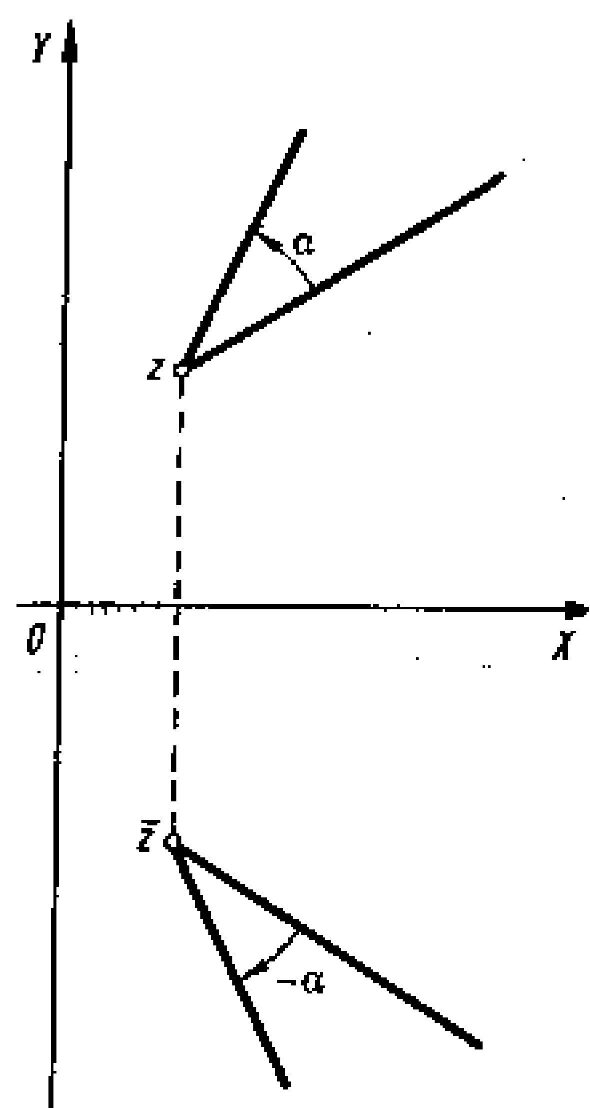
Likovi konačnih dimenzija se deformiraju, jer se omjer preslikavanja mijenja od točke do točke, ali se kutovi između dviju krivulja čuvaju.

Preslikavanje koje ima svojstvo čuvanja kutova i svojstvo stalnosti rastezanja zove se *konformno preslikavanje I vrste* ili kraće konformno preslikavanje, tj. preslikavanje koje čuva oblik.

Iz navedenog slijedi: Ako je funkcija $w = f(z)$ analitička u području D, pri čemu je u svim točkama tog područja $f'(z) \neq 0$, tada je preslikavanje što ga vrši ta funkcija $w = f(z)$ konformno u području D. Može se pokazati da vrijedi i obratno ako jednoznačna funkcija $w = f(z)$ vrši konformno preslikavanje, tada je funkcija $f(z)$ analitička s derivacijom koja je različita od nule.

Preslikavanje, koje ima svojstvo stalnosti rastezanja pri čemu se kutovi čuvaju po apsolutnoj vrijednosti, dok se smisao vrtnje tih kutova mijenja na suprotni, zove se *konformno preslikavanje II vrste.*

Općenito se može kazati: ako je preslikavanje što ga vrši funkcija $w = f(z)$ konformno, to će funkcija $w = \overline{f(z)}$ vršiti konformno preslikavanje II vrste. Stvarno, posljednje preslikavanje može se prikazati kao superpozicija dvaju preslikavanja $w = f(z)$ i $w_1 = \overline{w}$. Kod prvog preslikavanja kutovi se čuvaju kako po veličini tako i po smislu vrtnje, dok kod drugog preslikavanja smisao vrtnje kutova se mijenja na suprotni.



Slika 30.

Navedimo kao primjer poznatu nam funkciju $w = \overline{z}$, koja nije analitička, pa preslikavanje nije konformno niti u jednoj točki ravnine z. Preslikavanje što ga vrši ta funkcija sastoji se u tome da točka $z = x + iy$ prelazi u točku $\overline{z} = x - iy$, koja je simetrična s obzirom na realnu os X, pa svaka dva smjera koji izlazi iz točke z i koji zatvaraju međusobno kut α prelaze u dva smjera simetrična s prvima, a kut između njih bit će $-\alpha$. Vidi sliku 30.

Na taj način pri preslikavanju pomoću funkcije $w = \overline{z}$ mjerilo ili modul preslikavanja se ne mijenja, a kutovi se čuvaju po apsolutnoj vrijednosti, ali smisao vrtnje kutova mijenja se na suprotni.

Na kraju spomenimo još da pomoću analitičkih funkcija možemo dobiti mnogo ortogonalnih sustava krivocrtnih koordinata. Napose, koordinatni pravci u konformnom preslikavanju prelaze u dvije familije ortogonalnih krivulja i obratno, ortogonalna mreža krivulja transformira se u pravokutnu dekartovu mrežu.

U pređašnjem poglavlju pokazali smo da svaka analitička funkcija $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ predočuje geometrijski dvije familije ortogonalnih krivulja i kao primjer uzeli smo analitičku funkciju

$$f(z) = u + i\,v = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i\,2xy$$

pa smo pokazali da jednadžbe

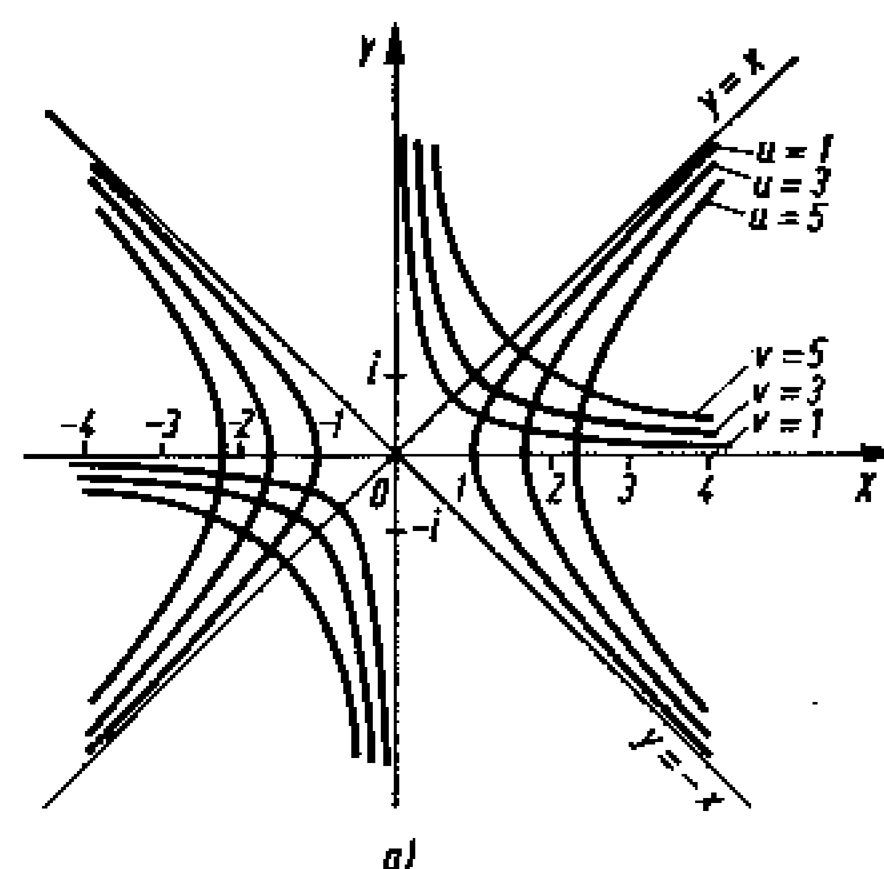
$$x^2 - y^2 = u = \text{const.}$$

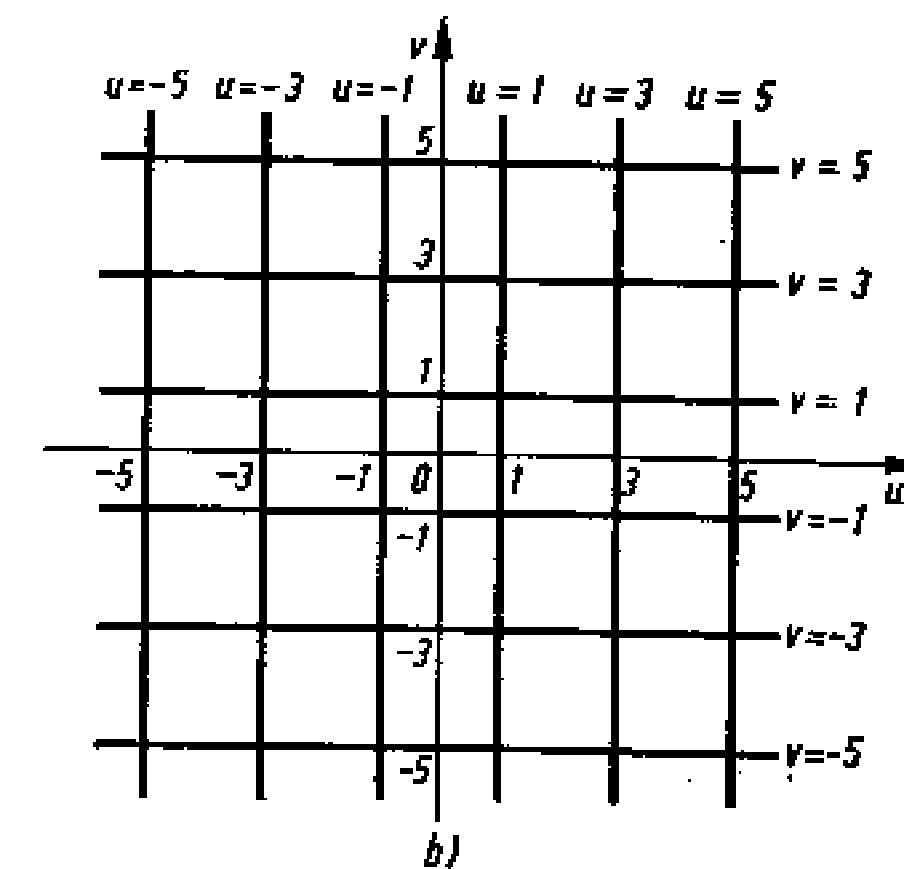
$$2xy = v = \text{const.}$$

predočuju geometrijski dvije familije ortogonalnih krivulja i to istostranih hiperbola. Vidi sliku 31a.

Za grafičko predočenje tih krivulja uzeli smo za parametre u i v vrijednosti $u = 1$, $u = 3$ i $u = 5$, a također $v = 1$, $v = 3$ i $v = 5$, a to su jednadžbe

međusobno okomitih pravaca paralelnih s koordinatnim osima U i V. Na taj način familije koordinatnih pravaca pri konformnom preslikavanju pomoću analitičke





Slika 31.

funkcije $f(z) = z^2$ prelaze u familije ortogonalnih hiperbola. Vidi sliku 31b, a također primjere navedene dalje pod 2.

Primjeri

1. Pokaži kakvo preslikavanje vrše zadane funkcije i odredi, ukoliko je konformno, modul ϱ preslikavanja i kut ψ zaokreta tangente.

1) $w = 3z$.

$w = 3(x + iy) = 3x + i\,3y$.

$u = 3x$ i $v = 3y$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Zadana funkcija zadovoljava Cauchy-Riemannove diferencijalne jednadžbe pa je analitička funkcija, koja vrši konformno preslikavanje u svim točkama ravnine z, jer je $w' = 3 \neq 0$ Odatle slijedi dalje da je koeficijent ili modul rastezanja ϱ jednak $w' = 3$ u bilo kojoj točki ravnine z. Budući da je $\psi = \arg w' = 0$, smjer pri preslikavanju se ne mijenja.

2) $w = z^2$.

Znamo već da ta funkcija zadovoljava Cauchy-Riemannove diferencijalne jednadžbe u svim točkama ravnine z osim ishodišta koordinatnog sustava, jer je $w' = 2z = 0$ samo u točki $z = 0$. Stoga vrši konformno preslikavanje u svim točkama osim ishodišta O, gdje ne čuva kutove već ih udvostručava.

Kako je

$$w = z^2 = (r\,e^{i\varphi}) = r^2 \cdot e^{i2\varphi},$$

slijedi: $\arg z = \varphi_0$ prelazi u $\arg w = 2\varphi_0$, odnosno

$$\arg w = 2 \arg z.$$

Npr. za $z = 1 + 2i$

$$w = (1 + 2i)^2 = -3 + 4i,$$

pa prema formulama (29) imamo:

$$\arg w = 2 \arg z_0 = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2}{1} = 2 \operatorname{arc} 63°25' = 126°50'$$

ili

$$\psi = \Phi - \varphi = 126°50' - 0 = \underline{126°50'}.$$

U svim ostalim točkama ravnine z preslikavanje $w = z^2$ je konformno. Uzmimo na primjer točku $z_0 = 1 + 2i$:

$$w_0 = f(z_0) = (1 + 2i)^2 = -3 + 4i,$$

dok je $w' = 2z$, pa je

$$w_0' = f'(z_0) = 2(1 + 2i) = 2 + 4i.$$

Modul rastezanja

$$\varrho = |w_0'| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} \doteq \underline{4{,}5},$$

a kut zaokreta tangente

$$\psi = \arg f'(z_0) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{4}{2}\right) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 \doteq \underline{\operatorname{arc} 63°25'}.$$

ili

$$\psi = \Phi - \varphi = \arg f(z_0) - \arg z_0 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{4}{-3}\right) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 \doteq$$

$$\doteq \operatorname{arc}(180° - 53°10') - \operatorname{arc} 63°25' = \operatorname{arc}(126°50' - 63°25') = \underline{\operatorname{arc} 63°25'}.$$

3) $w = 2z^2 + z$ u točkama

$$\text{a) } z_1 = 1 \quad \text{i} \quad \text{b) } z_2 = -\frac{1}{4} + i.$$

Iz primjera 1) i 2) slijedi da je zadana funkcija w analitička kao zbroj analitičkih funkcija, pa vrši konformno preslikavanje u svim točkama ravnine z.

a) U točki $z_1 = 1$.

$w_1 = 2 + 1 = 3$. Točka leži na realnoj osi U.

$w' = 4z + 1$, pa je $w_1' = 5$.

Slijedi: koeficijent rastezanja $\varrho_1 = |w_1'| = \underline{5}$, dok je kut zaokreta tangente

$$\psi_1 = \arg w_1' = \underline{0}.$$

b) U točki $z_2 = -\frac{1}{4} + i$.

$w_2 = 2z_2^2 + z_2 = 2\left(-\frac{1}{4} + i\right)^2 - \frac{1}{4} + i = -\frac{17}{8}$. Točka w_2 leži na realnoj osi U.

$w' = 4z + 1$, pa je $w_2' = 4\left(-\frac{1}{4} + i\right) + 1 = 4i,$

pa je koeficijent rastezanja

$$\varrho_2 = |w_2'| = \underline{4},$$

dok je

$$\psi_2 = \arg w_2' = \underline{\frac{\pi}{2}}.$$

c) U točki $z_3 = -\frac{i}{4}$.

$$w_3 = 2\left(-\frac{1}{16}\right) - \frac{i}{4} = -\frac{1}{8} - \frac{i}{2};$$

$$w_3' = (4z_3 + 1) = 1 - i,$$

pa je

$$\varrho_3 = |w_3'| = |1 - i| = \underline{\sqrt{2}},$$

$$\psi = \arg w_3' = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{-1}\right) = \underline{-\frac{\pi}{4}}.$$

2. Koji dio ravnine z se steže, a koji se rasteže pri preslikavanju

1) $w = z^2$.

Računamo koeficijent ϱ rastezanja, odnosno stezanja: $\varrho = |w'| = 2|z|$, a odatle slijedi da za $\varrho = 1$, odnosno za $|z| = \frac{1}{2}$ krug polumjera $\frac{1}{2}$ sa središtem u ishodištu O se preslikava u samog sebe, dok se krug $|z| < \frac{1}{2}$ steže, a krug $|z| > \frac{1}{2}$ rasteže.

2) $w = 2z^2 - 8z - 1$.

$\varrho = |w'| = |4z - 8| = 4|z - 2|$.

Nema deformacija za $\varrho = 1$, tj. za krug $|z - 2| = \frac{1}{4}$, dok se krug $|z - 2| < \frac{1}{4}$ steže, a krug $|z - 2| > \frac{1}{4}$ rasteže.

3) $w = \frac{1}{z}$.

$\varrho = |w'| = \left|-\frac{1}{z^2}\right| = \frac{1}{|z^2|}$, pa se krug $|z| > 1$ steže, a krug $|z| < 1$ rasteže.

4) $w = 3z^3$. $\left[\text{krug } |z| < \frac{1}{3} \text{ se steže, a } |z| > 1 \text{ rasteže}\right]$.

3. Odredi familije ortogonalnih krivulja u koje se preslikavaju, pomoću zadanih analitičkih funkcija, pravci dekartove mreže.

1) $w = e^z = e^{x+iy}$.

$w = u + iv = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y.$

Slijedi:

$$\begin{aligned} u &= e^x \cos y \\ v &= e^x \sin y \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

Jednadžbe (a) kvadrirajmo i zbrojimo:

$$u^2 + v^2 = e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y),$$

a odatle je

$$u^2 + v^2 = e^{2x}.$$

Za $x = x_0 = \text{const.}$, tj. za konstantni parametar x_0, dobivamo kružnicu sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava UV, tj. u ravnini W, dakle za varijabilni parametar x dobivamo familiju koncentričnih kružnica. Podijelimo li jednadžbe (a), dobit ćemo $\frac{v}{u} = \operatorname{tg} y$, pa je $v = u \operatorname{tg} y$ ili uz parametar $y = y_0 = \text{const.}$

$$v = u \operatorname{tg} y_0,$$

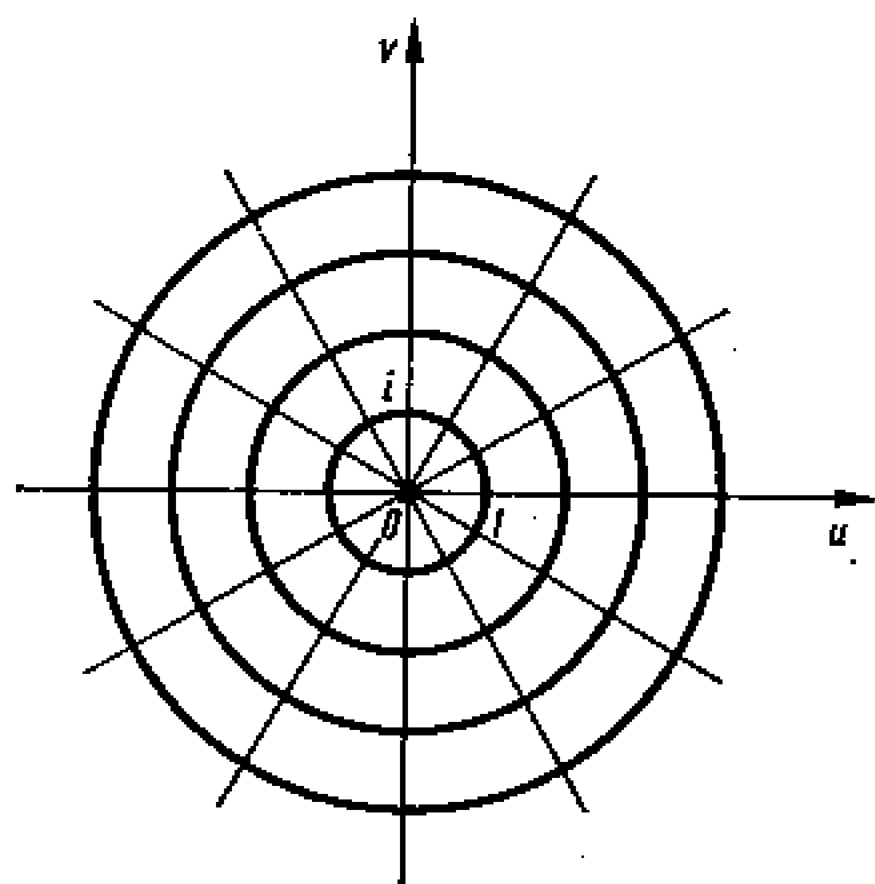
a to je jednadžba familije pravaca kroz ishodište, pri čemu su za

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqslant y_0 < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{0} \leqslant y_0 < \pi \end{aligned}\right\} \text{ pravci u I, odnosno u III kvadrantu,}$$

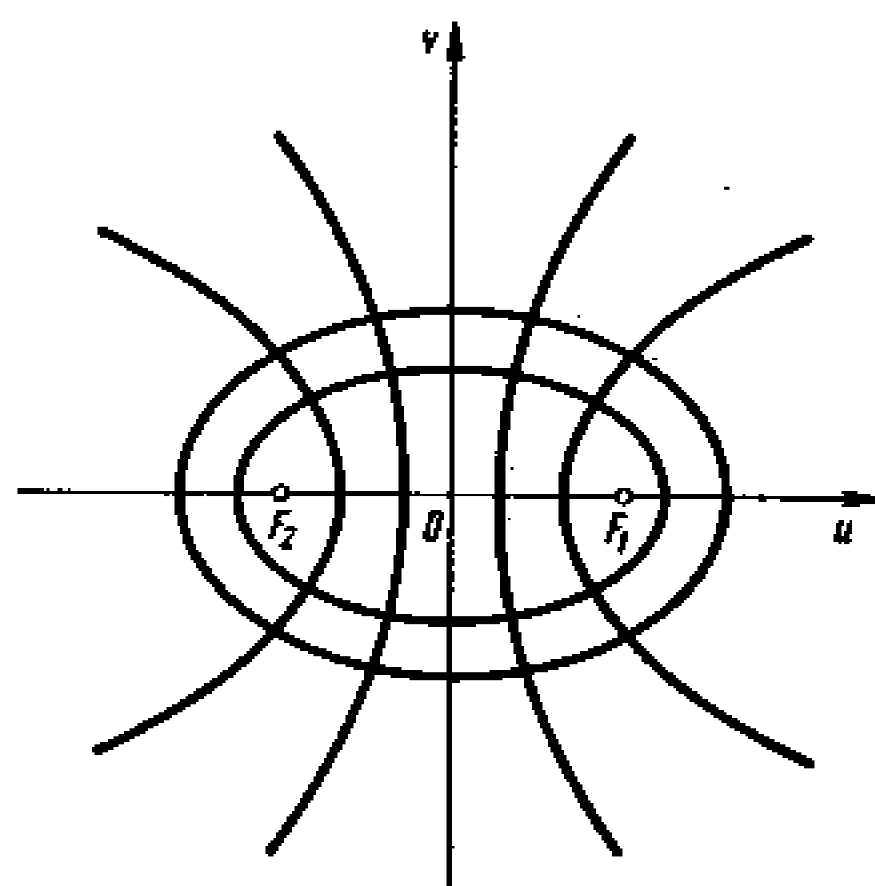
dok su za

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi}{2} < y_0 \leqslant \pi \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant y_0 < 0 \end{aligned}\right\} \text{ pravci u II, odnosno u IV kvadrantu.}$$

Pravci i kružnice sijeku se pod pravim kutom, u čemu se iskazuje svojstvo analitičke funkcije. Vidi sl. 32.



Slika 32.



Slika 33.

2) $w = \cos z$.

$u + i v = \cos z = \cos(x + i y) =$ [prema formuli (16)] $= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$,

pa je

$$\left.\begin{aligned} u &= \cos x \operatorname{ch} y \\ v &= -\sin x \operatorname{sh} y. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Iz (a) slijedi:

$$\left.\begin{aligned} u^2 &= \cos^2 x \operatorname{ch}^2 y \\ v^2 &= \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

Podijelimo li prvu jednadžbu sustava (b) s $\operatorname{ch}^2 x$, a drugu s $\operatorname{sh}^2 x$ pa dobivene jednadžbe zbrojimo, dobit ćemo

$$\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 x} = 1$$

ili uz konstantni parametar $x = x_0 = \text{const.}$

$$\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 x_0} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 x_0} = 1.$$

To je familija središnjih elipsa.

Oduzimanje navedenih jednadžbi (b) prethodno podijeljenih s $\cos^2 x$, odnosno sa $\sin^2 x$ daje

$$\frac{u^2}{\cos^2 x_0} - \frac{v^2}{\sin^2 x_0} = 1.$$

To je familija hiperbola.

Rezultat preslikavanja daje dvije ortogonalne familije konfokalnih elipsa i hiperbola. Nariši sliku!

3) $w = \sin z$. $\left[\dfrac{u^2}{\operatorname{ch}^2 y_0} + \dfrac{v^2}{\operatorname{sh}^2 y_0} = 1;\ \dfrac{u^2}{\sin^2 x_0} - \dfrac{v^2}{\cos^2 x_0} = 1\right]$.

4) $w = \operatorname{sh} z$.

$w = \operatorname{sh}(x + i y)$ [prema (19)'] $= \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y = u + i v$,

pa je

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sh} x \cos y \\ v &= \operatorname{ch} x \sin y. \end{aligned}$$

Postupajući na isti način kao u predašnjim primjerima dobivamo:

$$\frac{u^2}{\operatorname{sh}^2 x_0} + \frac{v^2}{\operatorname{ch}^2 x_0} = 1; \qquad \frac{v^2}{\sin^2 y_0} - \frac{u^2}{\cos^2 y_0} = 1,$$

a to su familije ortogonalnih elipsa i hiperbola. Nariši sliku.

5) $w = \operatorname{ch} z$. $\left[\dfrac{u^2}{\operatorname{ch}^2 x_0} + \dfrac{v^2}{\operatorname{sh}^2 x_0} = 1;\ \dfrac{u^2}{\cos^2 y_0} - \dfrac{v^2}{\sin^2 y_0} = 1\right]$.

4. Primjena u elektrostatici.

Neka su dana dva vodiča smještena u idealnom dielektriku. Neka su v_1 i v_2 njihovi potencijali. Osnovna zadaća se sastoji u prvom redu u određivanju nastalog elektrostatičkog polja. Zadaća se pojednostavnjuje, ako je zadano bilo koje konformno preslikavanje $w = f(z)$. Tada pomoću funkcija $u(x, y)$ i $v(x, y)$ možemo riješiti odgovarajuću elektrostatičku zadaću. Izrazi $u(x, y) = \text{const.}$ i $v(x, y) = \text{const.}$ dat će jednadžbe ekvipotencijalnih linija i silnica elektrostatičkog polja.

Uzmimo kao primjer da je konformno preslikavanje zadano funkcijom $w = \operatorname{Ar ch} \dfrac{z}{d}$.

Odatle slijedi: $z = d \operatorname{ch}(u + i v)$, a prema (19)' imamo

$$x + i y = d(\operatorname{ch} u \cos v + \operatorname{sh} u \sin v)$$

pa je

$$\begin{aligned} x &= d \operatorname{ch} u \cos v \\ y &= d \operatorname{sh} u \sin v. \end{aligned}$$

Odatle na način naveden u predašnjim primjerima dobivamo:

$$\frac{x^2}{d^2 \operatorname{ch}^2 u_0} + \frac{y^2}{d^2 \operatorname{sh}^2 u_0} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{x^2}{d^2 \cos^2 v_0} - \frac{y^2}{d^2 \sin^2 v_0} = 1,$$

a to su ortogonalne familije elipsa i konfokalnih hiperbola s fokusima F_1 i F_2 kojim je $2d$ međusobna udaljenost, ukoliko smatramo da su u_0 i v_0 konstantni parametri. Vidi sl. 33. Te elipse i hiperbole promatramo kao ekvipotencijalne linije, odnosno silnice nekog ravnog elektrostatičkog polja. U prostoru su to ekvipotencijalne plohe i eliptički valjci, čiji su poprečni presjeci predočeni na slici.

Uvijek možemo za jednu od tih ploha smatrati da je vodič određenog potencijala. Na taj način odredit ćemo silnice i poprečne presjeke za eliptičke valjke nabijene elektricitetom.

§ 10. RIEMANNOVE PLOHE

Znamo već da funkcija $w = f(z)$, gdje je $z = x + iy$ i $w = u + iv$, vrši preslikavanje ravnine z na ravninu w. Svaka točka z_1 prelazi u pripadnu točku w_1, geometrijski likovi (krivulje, područja) ravnine z pri prelazu na ravninu w transformiraju se u druge. Krivulja $x = x(t)$, $y = y(t)$ prelazi u krivulju $u = u[x(t), y(t)]$; $v = v[x(t), y(t)]$, gdje je t parametar. Koordinatni pravci $x = x_0$ prelaze u $u = u(x_0, y)$ i $v = v(x_0, y)$, gdje je x_0 parametar, a pravci $y = y_0$ prelaze u $u = u(x, y_0)$, $v = v(x, y_0)$, gdje je y_0 parametar.

Sada ćemo kazati nekoliko riječi o preslikavanju čitave ravnine z na ravninu w.

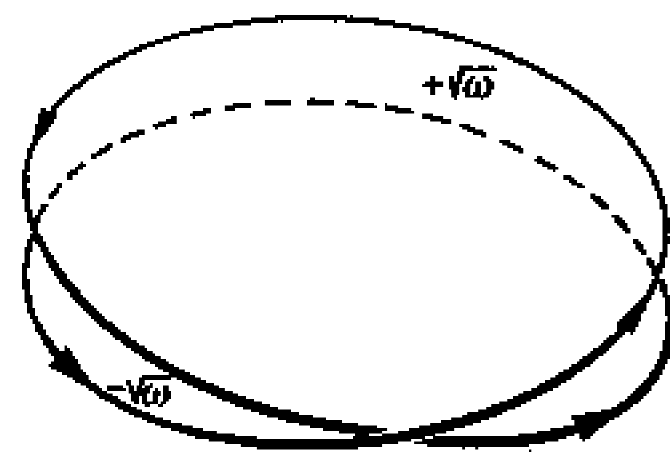
Neka je, na primjer, zadana funkcija $w = z^2$, koja u polarnim koordinatama glasi

$$R\, e^{i\Phi} = r^2\, e^{i2\varphi},$$

pa je $R = r^2$, dok je $\Phi = 2\varphi$.

Odatle slijedi: prvom kvadrantu ravnine z, tj. za $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, odgovara čitava gornja poluravnina w: $0 < \Phi < \pi$, drugom kvadrantu ravnine z, tj. za $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, odgovara čitava donja poluravnina w: $\pi < \Phi < 2\pi$, trećem kvadrantu ravnine z, tj. za $\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$, odgovara *gornja polovina drugoga lista* ravnine w: $2\pi < \Phi < 3\pi$, i konačno četvrtom kvadrantu ravnine z, tj. za $\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$, odgovara *donja polovina drugog lista* ravnine w: $3\pi < \Phi < 4\pi$.

Pri ponovnom pomicanju točaka po ravnini z njena slika w vraća se na prvi list ravnine w. To se dobije tako, da se spoje donji rub $+ u_2$ ravnine w_2 s gornjim rubom $+ u_1$ ravnine w_1. Na taj način dobivamo dva lista w_1 i w_2 za predočivanje točaka ravnine z u ravnini w. Ta dva lista čine, kao i ravnina, jednu cjelinu jer imamo neprekidni prijelaz na ravnine w_1 i w_2, a s ravnine w_2 natrag na w_1. Cijela ravnina z preslikava se na dva lista ravnine w. Ta se geometrijska tvorevina zove *Riemannova ploha* za funkciju $z = \sqrt{w}$. Vidi sl. 34.



Slika 34.

Analogno funkciji $z = \sqrt[3]{w}$ odgovara Riemannova ploha od tri lista: iz prvog lista slike w_1 točaka z prelaze kao w_2 u drugi list, a iz drugog lista kao w_3 prelaze u treći list odakle se vraćaju u prvi. Na isti način spajaju se n listova Riemannove plohe za funkciju $z = \sqrt[n]{w}$, dok Riemannova ploha funkcije $w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$ ima beskonačno mnogo listova, ovdje bi $z = e^w$ bila jednoznačna pa ne bi imala višelisnu Riemannovu plohu.

Na taj način možemo bilo koju analitičku funkciju promatrati kao jednoznačnu na njenoj Riemannovoj plohi. U tu svrhu dovoljno je naznačiti pripadni broj lista Riemannove plohe dotične funkcije w za njene vrijednosti u bilo kojoj točki z.

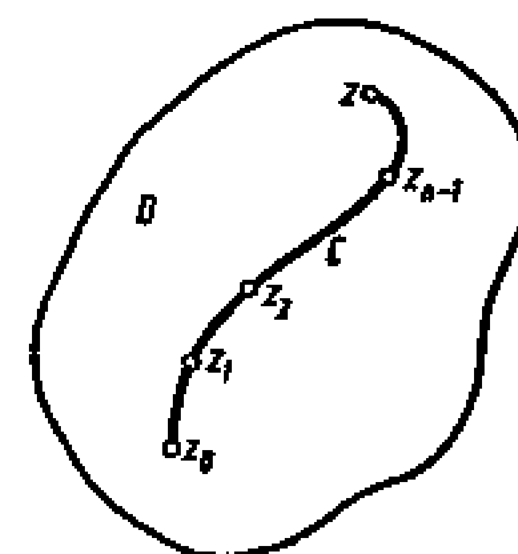
§ 11. INTEGRAL FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMJENLJIVE

1. Pojam

Neka je u području D ravnine $z = x + iy$ zadana funkcija

$$w = f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$$

i neka se u tom području nalazi krivulja C s početkom u točki z_0 i krajem u točki z. Za krivulju C pretpostavljamo da je glatka, tj. ima tangentu koja se neprekinuto mijenja. Vidi sl. 35.



Slika 35.

Podijelimo luk $z_0 z$ krivulje C u po volji uzet broj n lukova i to točkama $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{n-1}$, pri čemu je $z_n = z$, sukcesivno smještenih u pozitivnom smislu krivulje C. Svakom parcijalnom luku dodijelimo pripadnu vrijednost $f(z_k) \cdot \Delta z_k$, koja je dobivena množenjem vrijednosti zadane funkcije u lijevom kraju tog luka s prirastom Δz_k promjenljive z, koji odgovara tom luku:

$$\Delta z_k = z_{k+1} - z_k.$$

Načinivši zbroj tih produkata, proširimo ga na sve parcijalne lukove, pa na taj način dobivamo sumu:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} f(z_k)\, \Delta z_k. \qquad \text{(a)}$$

Uz pretpostavku da maksimum duljina svih djelomičnih lukova teži nuli, pokažimo da izraz (a) teži određenom konačnom limesu, koji ne zavisi od načina prema kojemu ti parcijalni lukovi teže nuli.

U tu svrhu uvedimo oznake:

$$z_k = x_k + i\, y_k = u(x_k, y_k) + i\, v(x_k, y_k) = u + i\, v$$

i

$$\Delta z_k = \Delta x_k + i\, \Delta y_k,$$

pa izraz (a) prima oblik:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} f(z_k)\, \Delta z_k = \sum_{k=0}^{k=n-1} (u_k + i\, v_k)(\Delta x_k + i\, \Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n-1} (u_k\, \Delta x_k - v_k\, \Delta y_k) + i \sum_{k=0}^{k=n-1} (v_k\, \Delta x_k + u_k\, \Delta y_k). \qquad \text{(b)}$$

Kad maksimumi duljina svih djelomičnih lukova teže nuli, obje sume desne strane jednakosti (b) teže limesima $\int_C u\, dx - v\, dy$, odnosno $i \int_C v\, dx + u\, dy$,

pa lijeva strana jednakosti (b) teži određenom konačnom limesu, kada duljine sviju parcijalnih lukova teže nuli. Taj limes zvat ćemo konturnim integralom umnoška $f(z)\,dz$ uzduž krivulje C i označavati ga s $\int\limits_C f(z)\,dz$. Imamo dakle

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_C u\,dx - v\,dy + i\int\limits_C v\,dx + u\,dy. \tag{30}$$

Ta formula prikazuje integral kompleksne promjenljive pomoću dva realna krivocrtna integrala, ona se lako pamti, ako se napiše u obliku

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_C (u + v\,i)(dx + i\,dy). \tag{30)'$$

Iz formule (30) slijedi da ti konturni integrali imaju poznata svojstva linijskih (krivuljnih) integrala:

1) Integral zbroja funkcija kompleksne promjenljive jednak je zbroju integrala tih funkcija.

2) Kompleksna konstanta stavi se ispred znaka integrala.

3) Integral mijenja predznak na protivni, ako put integriranja mijenjamo na suprotni, itd.

2. Računanje integrala

To računanje vrši se tako, da te integrale svodimo na dva realna krivuljna integrala.

Neka su

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

parametarske jednadžbe krivulje C i neka početku i kraju te krivulje odgovaraju vrijednosti parametra $t = t_0$ i $t = T$. Pomoću tih jednadžbi svodimo integrale, koji ulazi u formulu (30), u određene integrale:

$$\begin{aligned}\int\limits_C f(z)\,dz &= \int\limits_{t_0}^{T} \{u[x(t), y(t)]\,x'(t) - v[x(t), y(t)]\,y'(t)\}\,dt +\\ &+ i\int\limits_{t_0}^{T} \{v[x(t), y(t)]\,x'(t) + u[x(t), y(t)]\,y'(t)\}\,dt =\\ &= \int\limits_{t_0}^{T} \{u[x(t), y(t)] + i\,v[x(t), y(t)]\}\,\{x'(t) + i\,y'(t)\}\,dt. \end{aligned} \tag{30)''$$

Ako mjesto dviju realnih parametarskih jednadžbi krivulje C uvedemo jednu ekvivalentnu kompleksno-parametarsku jednadžbu te krivulje C

$$z = z(t) = x(t) + i\,y(t),$$

tu formulu (30)″ možemo napisati u obliku

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_{t_0}^{T} f[z(t)]\,z'(t)\,dt. \tag{30)'''$$

Ta formula je podesna za računanje krivuljnih integrala. Vidi također Repetitorij više matematike, Dio III § 10. Linijski (krivuljni) integrali.

Primjeri

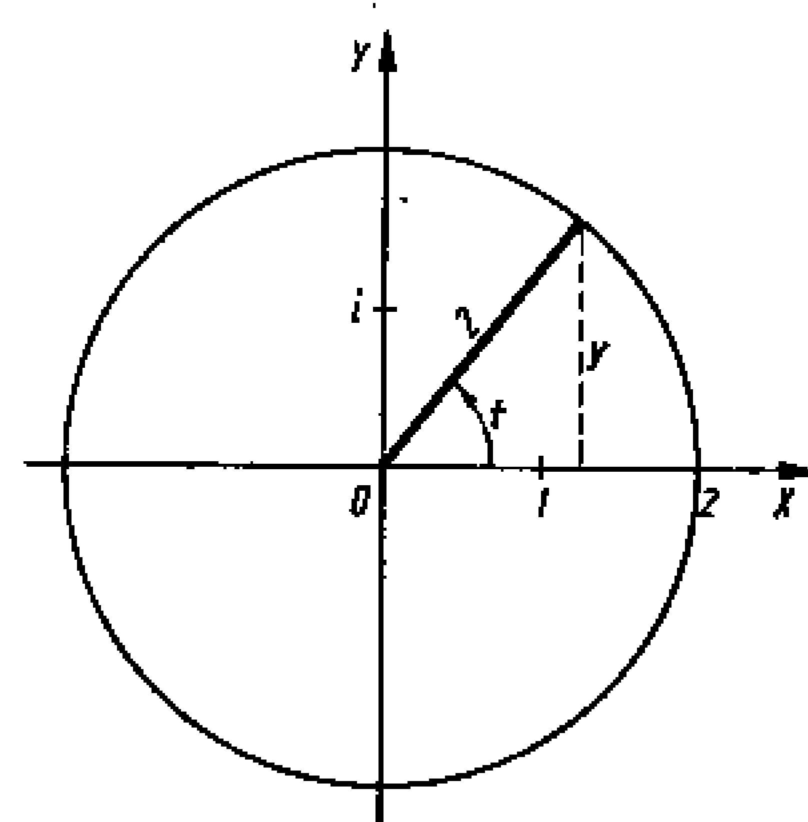
Napiši zadane jednadžbe krivulja C u kompleksno-parametarskom obliku, odnosno u obliku $f(x, y) = 0$.

1. $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$.

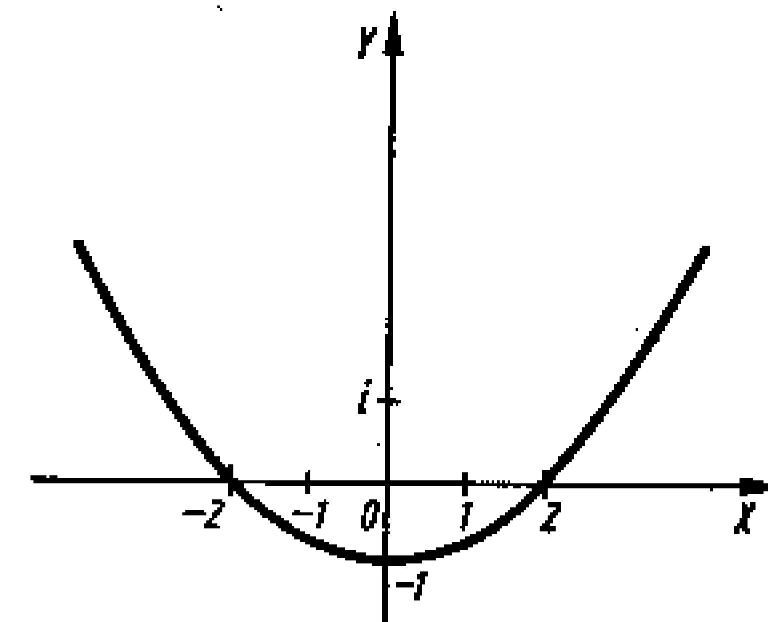
$$\underline{z(t) = 2(\cos t + i\sin t).}$$

Kvadriranje i zbrajanje zadanih jednadžbi daje

$\underline{x^2 + y^2 = 4.}$ Vidi sliku 36.



Slika 36.



Slika 37.

2. $y = 2x$.

Stavimo $x = t$, pa je $y = 2t$. Prema $z = x + i\,y$ imamo:

$$z(t) = t + i\,2t \quad \text{ili} \quad \underline{z = (1 + 2i)\,t.}$$

3. $x = 2t$, $y = t^2 - 1$.

$$\underline{z(t) = 2t + i(t^2 - 1).}$$

Uvrštenje $t = \dfrac{x}{2}$ u $y = t^2 - 1$ daje $y = \dfrac{x^2}{4} - 1$. Parabola. Vidi sl. 37.

4. $z = 2\cos t + i\,3\sin t$.

Prema $z = x + iy$ imamo

$$x = 2\cos t \qquad \frac{x}{2} = \cos t$$
ili
$$y = 3\sin t \qquad \frac{y}{3} = \sin t.$$

Kvadriranje i zbrajanje tih jednadžbi daje jednadžbu elipse

$$\underline{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.}$$

5. $z = t + it$. $[y = x]$.

6. $z = t^2 + it + 4$.

Iz $x = t^2 + 4$ i $y = t$ slijedi jednadžba parabole

$$\underline{y = \sqrt{x - 4}.}$$

7. $z = t + \frac{i}{t}$. $\left[\text{Hiperbola } y = \frac{1}{x}\right]$.

8. $z = \cos t + i\sin t$ $[x^2 + y^2 = 1]$.

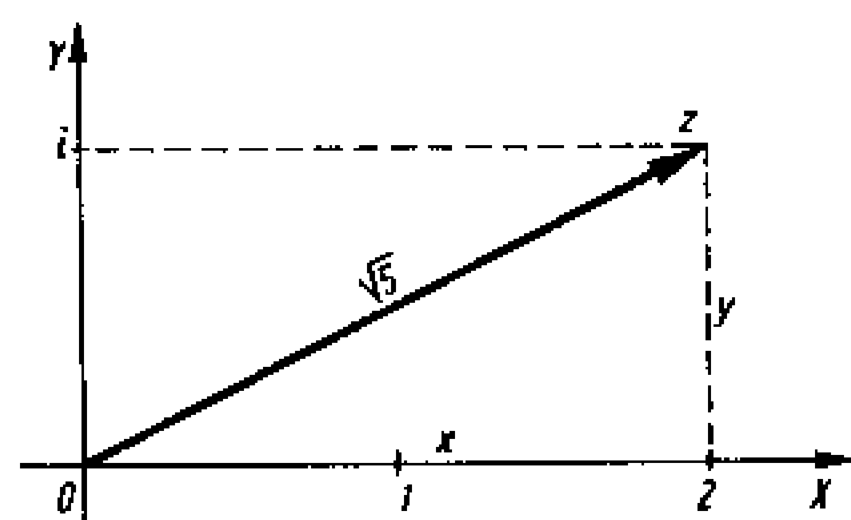
9. $z = t(it^2 + 1)$. $[y = x^3]$.

Računanje integrala kompleksne funkcije uzduž zadane krivulje C pokazat ćemo sada na primjerima.

Primjeri

Izračunaj zadane integrale.

1. $\int\limits_C |z|\,dz$, gdje je C odsječak pravca, koji je iz točke O usmjeren prema točki $z = 2 + i$.



Slika 38.

Prema slici 38 parametarska jednadžba tog odsječka glasi

$$x = 2t, \quad y = t,$$

a kompleksno parametarska jednadžba ima oblik

$$z = x + iy = 2t + it = (2 + i)\,t.$$

pri čemu je $0 \le t \le 1$.

Računamo prema formuli (30)‴.

$$|z| = \sqrt{4t^2 + t^2} = t\sqrt{5}; \quad dz = (2 + i)\,dt$$

$$\int\limits_C |z|\,dz = \int\limits_0^1 t\sqrt{5}(2 + i)\,dt = \sqrt{5}(2 + i)\left|\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \underline{\frac{1}{2}\sqrt{5}(2 + i).}$$

2. $\int\limits_C z^2\,dz$, gdje je C odsječak pravca određenog s $x = 2t$, $y = 3t$ i to za $1 < t < 2$. Prikaži ga grafički!

Računamo uzevši u obzir da je $z(t) = 2t + i\,3t$, odnosno $z = (2 + 3i)\,t$, pa je $dz = z'(t)\,dt = (2 + 3i)\,dt$:

$$\int\limits_C z^2\,dz = \int\limits_1^2 (2t + i\,3t)^2 \cdot (2 + 3i)\,dt = (2 + 3i)^3 \int\limits_1^2 t^2\,dt = (2 + 3i)^3 \cdot \left|\frac{t^3}{3}\right|_1^2 =$$

$$= (2 + 3i)^3\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = (8 + 36i - 54 - 27i)\frac{7}{3} = (-46 + 9i)\frac{7}{3} = \underline{-107\frac{1}{3} + 21\,i.}$$

3. $\int\limits_C \mathcal{R}(z)\,dz$.

1) C je kružnica $|z| = R$.

$z = R\,e^{it} = R(\cos t + i\sin t)$, pa je $\mathcal{R}(z) = R\cos t$;

$dz = R(-\sin t + i\cos t)\,dt$.

$$\oint\limits_C = 2\int\limits_0^\pi R\cos t \cdot R(-\sin t + i\cos t)\,dt = 2R^2\int\limits_0^\pi(-\sin t\cos t + i\cos^2 t)\,dt =$$

$$= 2R^2\left|-\frac{\sin^2 t}{2} + i\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\right|_0^\pi = 2R^2\,i\,\frac{\pi}{2} = \underline{i\,\pi\,R^2.}$$

2) C je radij-vektor točke $(2 + i)$. $[2 + i]$.

3) C je polukružnica $|z| = 1$. Početak puta je u $z = 1$. $\left[i\,\frac{\pi}{2}\right]$.

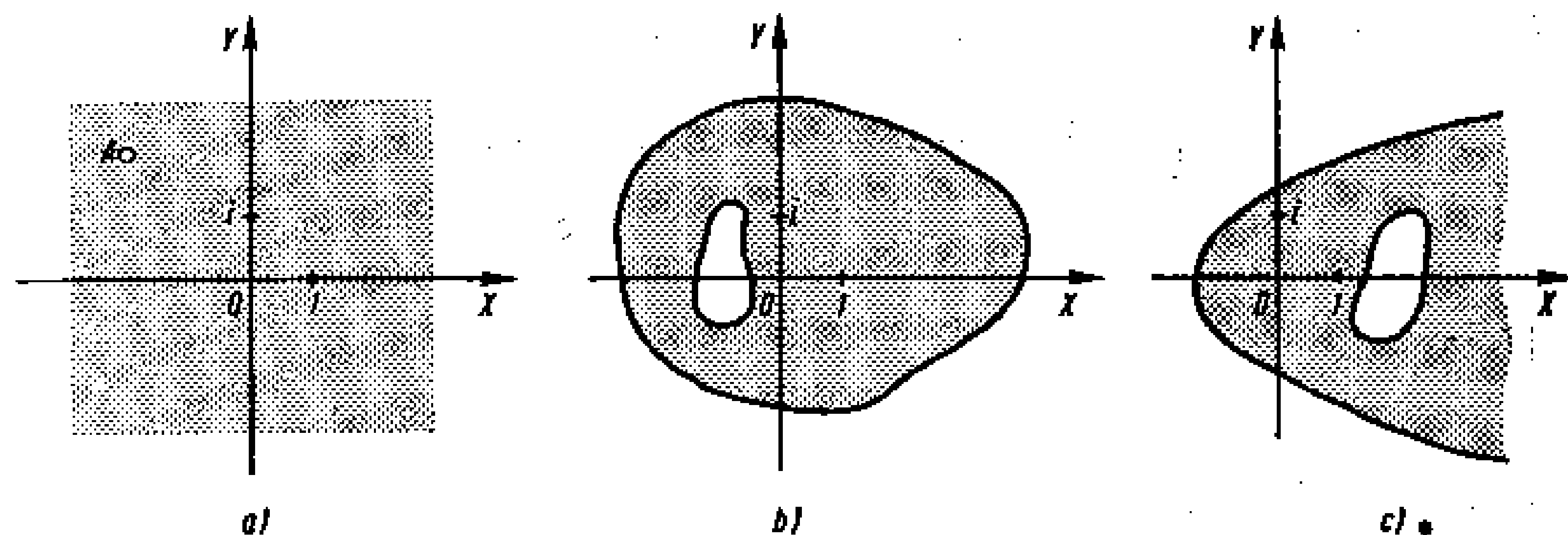
4. Izračunaj $\int\limits_C \bar{z}\,dz$, ako je

1) C odsječak pravca od točke O do točke $(1 + i)$. $\left[\frac{1+i}{2}\right]$.

2) C izlomljeni pravac s vrhovima u točkama 0,1 1, $1 + i$. $[1 + i]$.

§ 12. NEOVISNOST INTEGRALA O PUTU. CAUCHYJEV INTEGRALNI TEOREM

Prije nego pređemo na nezavisnost integrala od puta integriranja, odnosno na Cauchyjev teorem, kazat ćemo nekoliko riječi o području integriranja. Područje se zove *jednostruko suvislo*, ako u područje spada ravnina XY čitava ili ograničena, područje je *dvostruko suvislo*, ako je u čitavoj ravnini XY isključena jedna točka A (vidi sliku 39a), dok slike 39b i 39c također prikazuju dvostruko suvisla područja i to neograničeno i ograničeno.



Slika 39.

Sličan je oblik trostruko suvislog područja. Vidi dalje sl. 41.

Iz definicije određenog integrala neprekinute funkcije $f(z)$ znamo već da vrijednost integrala zavisi ne samo od podintegralne funkcije, već i od puta integriranja C. Spojimo li točke z_0 i Z (vidi sl. 35) različitim krivuljama, koje leže u jednostruko suvislom području, i izračunamo li $\int f(z)\,dz$ uzduž tih krivulja, dobit ćemo, govoreći općenito, različite vrijednosti tih integrala. Nastaje pitanje, kojim uvjetima mora odgovarati funkcija $f(z)$, da njena vrijednost ne zavisi od puta integriranja, već jedino od početne i konačne točke toga puta.

Kao i u slučaju realnih krivuljnih integrala lako je pokazati da se zadaća svodi na iznalaženje onog uvjeta uz koji je integral uzet po zatvorenoj krivulji jednak nuli. Rješenje naše zadaće možemo provesti u vezi s odgovarajućom zadaćom za realne linijske integrale, jer je integral kompleksne promjenljive izražen sa dva realna integrala.

Kako je prema formuli (30)

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C u\,dx - v\,dy + i\oint_C v\,dx + u\,dy \tag{a}$$

zadaća se svodi na dokaz jednakosti dvaju realnih krivuljnih integrala

$$\oint_C u\,dx - v\,dy \quad i \quad \oint_C v\,dx + u\,dy.$$

Pretpostavimo da je funkcija $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ analitička u svakoj točki jednostruko suvislog područja D i ima u svakoj točki tog područja neprekinute derivacije. Odatle slijedi da su funkcije u i v neprekinute u području D zajedno sa svojim parcijalnim derivacijama, koje zadovoljavaju Cauchy-Riemannove diferencijalne jednadžbe

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad i \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Iz teorije krivuljnih integrala znamo da je

$$\oint_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

gdje je C bilo koja zatvorena krivulja, ako funkcije P i Q zadovoljavaju uvjet

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Za naš slučaj to znači:

$$\oint_C u\,dx - v\,dy = 0$$

jer je

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{b}$$

i

$$\oint_C v\,dx + u\,dy = 0 \tag{c}$$

jer je

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Uslijed analitičnosti funkcije $f(z)$ ispunjeni su uvjeti (b) i (c) pa je prema (a):

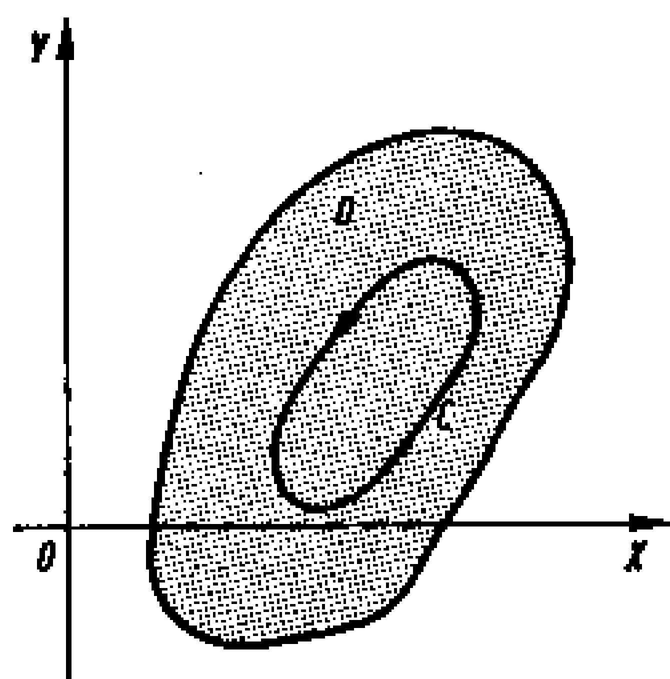
$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

Time smo dokazali Cauchyjev teorem, osnovni stavak teorije analitičkih funkcija:

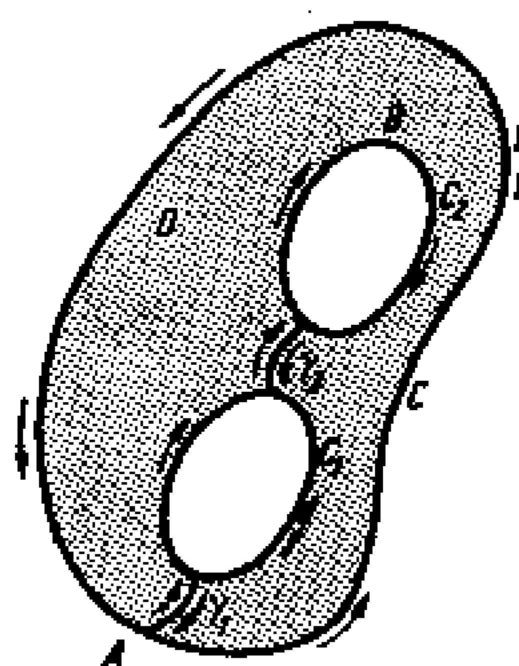
Ako funkcija $f(z)$ jednoznačna u jednostruko suvislom području D ima u svakoj točki tog područja neprekinutu derivaciju, tada je integral te funkcije uzet uzduž bilo koje zatvorene krivulje koja pripada području D, jednak nuli.

Primijetimo da Cauchyjev teorem vrijedi za svaku funkciju analitičku u području D. Vidi sliku 40.

Područje D može biti i višestruko suvislo, na primjer trostruko suvislo prikazano na slici 41.



Slika 40.



Slika 41.

Izvedemo li dva prereza γ_1 i γ_2 i označimo li s G cjelokupnu složenu konturu, koja se sastoji od kontura C, C_1 i C_2 i prereza γ_1 i γ_2, područje ograničeno konturom G bit će jednostruko suvislo pa ćemo prema Cauchyjevom teoremu za to jednostruko suvislo područje D dobiti

$$\oint_G f(z)\,dz = 0,$$

pri čemu konturu G obilazimo tako, da područje obilaženja bude uvijek *slijeva* (u pozitivnom smislu). U tom slučaju oba prereza γ_1 i γ_2 prolazit ćemo dva puta u suprotnim smjerovima, pa će se integrali po tim prerezima uzajamno poništiti (vidi sliku 41). Konačno ćemo dobiti

$$\oint_C f(z)\,dz + \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz = 0.$$

Kako vidimo na slici 41, vanjsku konturu obilazimo u pozitivnom smislu, a nutarnje u negativnom (površina desno).

Zamijenimo li smisao obilaženja nutarnjih kontura C_1 i C_2 na protivni, imat ćemo

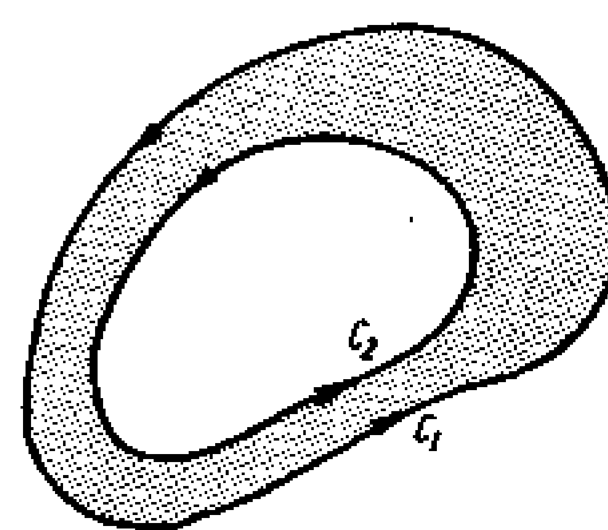
$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz. \tag{31}$$

Sad se i vanjska kontura i obje nutarnje obilaze u pozitivnom smislu, pa možemo formulirati Cauchyjev teorem za višestruko suvislo područje kako slijedi:

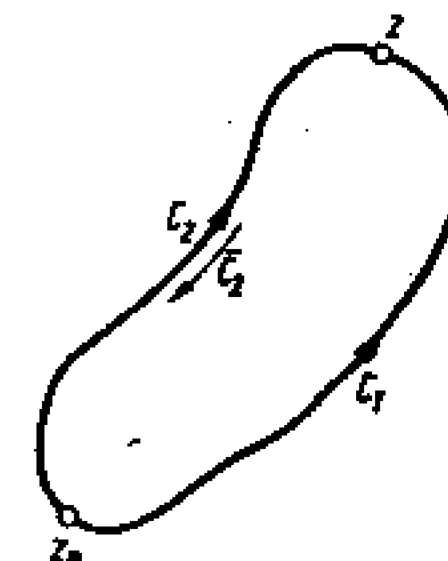
Ako je funkcija $f(z)$ analitička u zatvorenom višestruko suvislom području D, to je integral te funkcije po vanjskoj konturi, koja omeđuje područje D, jednak zbroju integrala po svim nutarnjim konturama koje omeđuju D, pri čemu se sve te konture obilaze u pozitivnom ili sve u negativnom smislu.

Napose, ako je funkcija $f(z)$ analitička u prstenu (vidi sliku 42) između kontura C_1 i C_2 i na tim konturama, tada je

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz. \tag{31)'$$



Slika 42.



Slika 43.

Navedimo još drugu posljedicu Cauchyjeva teorema. Neka je funkcija $f(z)$ analitička u jednostruko suvislom području D. U tom području izaberemo zatvorenu konturu C koju podijelimo u dva dijela C_1 i C_2 sa zajedničkim početkom z_0 i krajem z. Vidi sl. 43.

Prema Cauchyjevu teoremu i svojstvu konturnih integrala da mijenjaju predznak kad se mijenja smisao obilaženja, imamo:

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{\bar{C}_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz = 0$$

a odatle je

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz. \tag{31)''$$

To znači: ***ako je funkcija $f(z)$ analitička u nekom jednostruko suvislom području D, tada integral te funkcije $f(z)$ uzet po bilo kojem nezatvorenom luku C, koji pripada području D, zavisi samo od početne točke z_0 i konačne točke z toga luka C (a ne od luka C!).***

Stoga se za te integrale uzima oznaka

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta,$$

tj. promjenljivu integriranja označujemo slovom ζ mjesto z da izbjegnemo nesporazum.

Navedimo još da se kao u realnom području funkcija $F(z)$ zove ***primitivna funkcija*** s obzirom na funkciju $f(z)$, ako je $F'(z) = f(z)$. Očito je da će i funkcija $F(z) + C$, gdje je C konstanta, biti primitivna funkcija za $f(z)$. I obratno, dvije

različite primitivne funkcije $F_1(z)$ i $F_2(z)$ za jednu te istu funkciju $f(z)$ razlikuju se jedna od druge za konstantan pribrojnik.

Iz navedenog slijedi: ako je funkcija $F(z)$ neka primitivna funkcija za $f(z)$, tada funkcija $F(z) + C$, gdje je C konstanta po volji, predočuje skup svih primitivnih funkcija za $f(z)$. Taj se skup zove neodređeni integral funkcije $f(z)$ i označuje se sa

$$\int f(z)\,dz = F(z) + C, \quad \text{gdje je} \quad F'(z) = f(z). \tag{32}$$

Odatle slijedi dalje da su tablice osnovnih integrala u kompleksnom i u realnom području jednake, ukoliko su jednake tablice derivacija. Tako je na primjer:

$$\int e^z\,dz = e^z + C; \quad \int z^n\,dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1, \text{cio broj});$$

$$\int \frac{dz}{z} = \ln z + C; \quad \int \sin z\,dz = -\cos z + C \quad \text{itd.}$$

Primjeri

1. Izračunaj integrale po polukružnicama prvo po gornjoj, a zatim po donjoj polazeći iz $z = -1$ u $z = +1$ prema slici 44 i to za funkcije:

1) $w = z^2$.

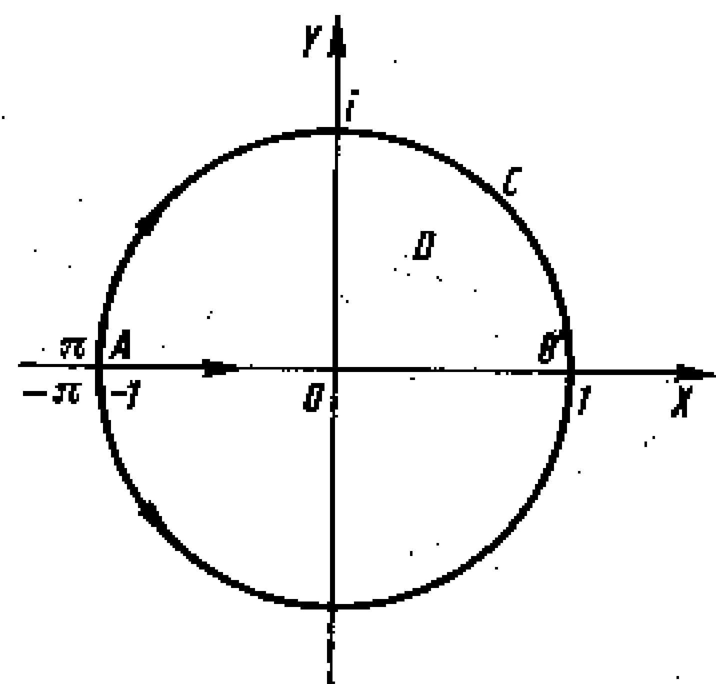
Znamo da je $\int z^2\,dz = \frac{z^3}{3}$.

a) Idući po gornjoj polukružnici i uzevši $z = e^{i\varphi}$ dobivamo

$$I = \frac{1}{3}\,e^{3i\varphi}\Big|_{+\pi}^{0} = \frac{1}{3}(e^0 - e^{3i\pi}) =$$

$$= \frac{1}{3}\Big|\,1 - (\cos 3\pi + i\sin 3\pi)\Big|_{+\pi}^{0} =$$

$$= \frac{1}{3}\,(1 + 1) = \underline{\frac{2}{3}},$$



Slika 44.

b) po donjoj polukružnici:

$$I = \frac{1}{3}\,e^{3i\varphi}\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{3}(1 - e^{-3i\pi}) = \frac{1}{3}\Big|\,1 - [\cos(-3\varphi) + i\sin(3\varphi)]\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{3}(1 + 1) = \underline{\frac{2}{3}},$$

c) po pravcu AB:

$$I = \frac{z}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}\,(1 + 1) = \underline{\frac{2}{3}}.$$

Dobili smo za sve tri staze integriranja *istu* vrijednost $\frac{2}{3}$ integrala, jer je funkcija $w = z^2$ analitička po čitavoj ravnini Z pa vrijednost integrala ne zavisi od puta integriranja već od početne i konačne točke toga puta.

2) $w = \frac{1}{z}$.

Znamo da je $\int \frac{dz}{z} = \ln z + C$, pa uzevši z u obliku $e^{i\varphi}$ dobivamo:

a) po gornjoj polukružnici $I = |\ln e^{i\varphi}\,\big|_{\pi}^{0} = i\,\varphi\,\big|_{\pi}^{0} = \underline{-i\,\pi}$,

b) po donjoj polukružnici $I = |\ln e^{i\varphi}\,\big|_{-\pi}^{0} = i\,\varphi\,\big|_{-\pi}^{0} = \underline{+i\,\pi.}$

Dobili smo *različite* vrijednosti integrala, jer funkcija $w = \frac{1}{z}$ nema derivacije u točki $z = 0$, pa ta točka nije pravilna već singularna i to pol I. reda.

Međutim, ako točka $z = 0$ leži *izvan* zatvorene konture C, to je $\oint\limits_C \frac{dz}{z}$ uzet uzduž te konture jednak nuli, jer je funkcija $w = \frac{1}{z}$ analitička posvuda u ravnini z osim $z = 0$. Ako pak točka $z = 0$ leži *unutar* zatvorene konture C, tada će na temelju gore navedenog biti $\oint\limits_C \frac{dz}{z} \neq 0$ i imat će određenu stalnu vrijednost, koja ne zavisi od oblika konture C.

Da se odredi ta stalna vrijednost, dovoljno je uzeti za konturu C kružnicu polumjera R sa središtem u $z = 0$.

Dobivamo:

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z} = [z = R\,e^{i\varphi},\ dz = i\,R\,e^{i\varphi}\,d\varphi] = \int_0^{2\pi} \frac{i\,R\,e^{i\varphi}}{R\,e^{i\varphi}}\,d\varphi = i\int_0^{2\pi} d\varphi = i\,(2\,\pi - 0) = \underline{2\,\pi\,i.}$$

Ta vrijednost integrala stalna je za sve zatvorene krivulje oko točke $z = 0$.

Na primjer po kružnici polumjera $R = 1$, koja je prikazana na slici 44, dobivamo, obilazeći je u pozitivnom smislu, istu vrijednost $2\,\pi\,i$, jer je

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z} = \pi\,i - (-\pi\,i) = \underline{2\,\pi\,i.}$$

3) Pokazat ćemo još na primjeru funkcije $w = \sqrt{z}$ da je jednoznačnost analitičke funkcije $f(z)$ bitna pretpostavka Cauchyjeva teorema. Analitička funkcija $w = \sqrt{z}$ dvoznačna je. Da to pokažemo izaberemo jednu vrijednost ili, kako se kaže, jednu granu te funkcije,

npr. w_1, pa ako točka z izvrši jedno obilaženje u pozitivnom smislu oko točke $z = 0$ i vrati se u polazni položaj, tada se φ poveća za 2π, dok w_2 primi vrijednost

$$\sqrt{r}\cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi}{2}} = \sqrt{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)}.$$

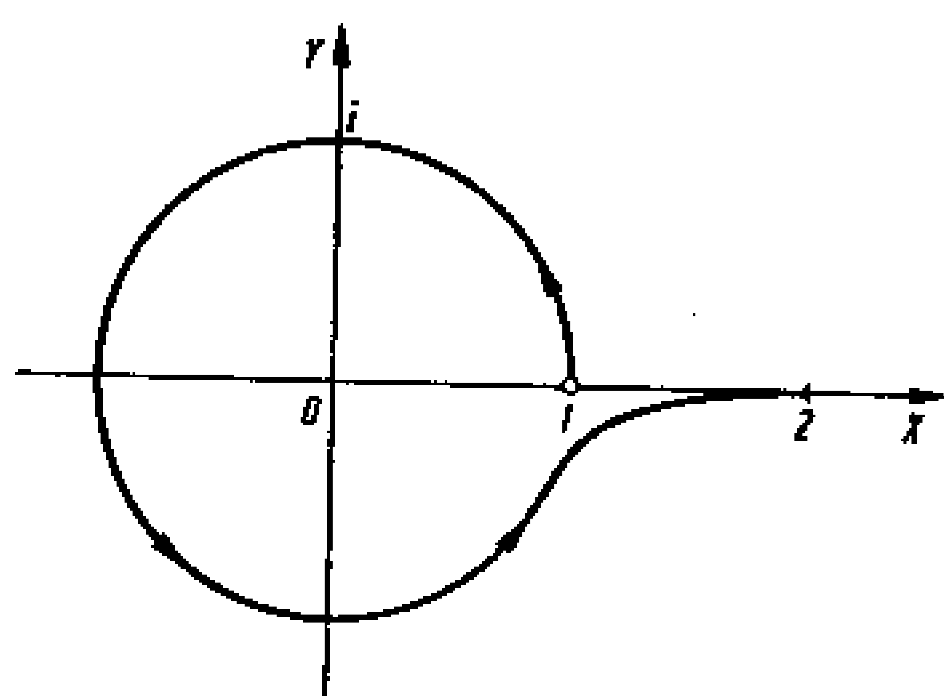
Postupimo li na isti način s w_2, prijeći će w_2 u w_1, jer je

$$\sqrt{r}e^{i\left(\frac{\varphi+2\pi}{2}+\pi\right)} = \sqrt{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+2\pi\right)} = \sqrt{r}\left(e^{i\frac{\varphi}{2}}\cdot e^{i2\pi}\right) = \sqrt{r}\cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}\cdot 1 = w_1.$$

Na taj način dvije grane funkcije $w = \sqrt{z}$ pri obilaženju točke $z = 0$ neprekidno prelaze iz jedne grane u drugu, a nakon dvostrukog obilaženja vraćaju se k polaznoj grani. Točka $z = 0$ funkcije $w = \sqrt{z}$ zove se *točka grananja drugog reda*, jer funkcija ima dvije grane. »Beskonačna točka« $z = \infty$ uzima se kao druga točka grananja funkcije $\sqrt{z}$.

Analogno funkcija $\sqrt[n]{z}$ ima n grana kod obilaženja točke grananja $z = 0$, koja je n-tog reda.

Znamo da je funkcija $w = \mathrm{Ln}\, z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$, gdje je $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, beskonačno mnogoznačna, pa obilazi li točka z oko ishodišta koordinatnog sustava, φ se povećava kod svakog obilaženja za 2π. Na taj način vrijednost w_0 prelazi u w_1, w_1 u w_2 itd. bez kraja. Takva se točka grananja zove *točka grananja beskonačnog reda.*



Slika 45.

Znamo da vrijednost integrala $\oint\limits_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$ ne ovisi o putu obilaženja oko točke $z = 0$, već jedino o broju tih obilaženja. Sada vidimo, da nejednoznačnost logaritamske funkcije jest rezultat mogućnosti izbora puta s različitim brojem obilaženja oko točke $z = 0$, gdje funkcija $\frac{1}{z}$ postaje beskonačna. Npr.

$$\oint \frac{dz}{z} = \int_1^2 \frac{dz}{z} = 2\pi i + \ln z\Big|_1^2 = 2\pi i + \ln 2 \doteq 0{,}69 + 2\pi i. \quad \text{Vidi sl. 45.}$$

§ 13. NEODREĐENI INTEGRAL. NEWTON-LEIBNIZOVA FORMULA

Neka je $F(z)$ bilo koja primitivna funkcija za analitičku funkciju $f(z)$ u nekom jednostruko suvislom području. Tada će funkcija $\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$ biti također primitivna funkcija za $f(z)$, pa prema formuli (32) imamo

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta = F(z) + C. \tag{a}$$

Za $z = z_0$ kontura, po kojoj se računa integral lijeve strane gornje jednakosti, zatvara se pa prema Cauchyjevu teoremu integral pretvara se u nulu. Na taj način uz $z = z_0$ jednakost (a) prima oblik $0 = F(z_0) + C$, a odatle slijedi $C = -F(z_0)$ i

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta = F(z) - F(z_0). \tag{33}$$

To znači: krivuljni integral analitičke funkcije u jednostruko suvislom području jednak je prirastu pripadne primitivne funkcije na putu integriranja.

To je Newton-Leibnizova formula.

Primjeri

Izračunaj zadane integrale.

1. $\int\limits_0^{1+i} z^2\, dz.$

Budući da je podintegralna funkcija z^2 analitička po čitavoj ravnini z, integriramo prema formuli (33):

$$\int_0^{1+i} z^2\, dz = \left|\frac{z^3}{3}\right|_0^{1+i} = \frac{1}{3}(1+i)^3 = \frac{1}{3}(1 + 3i - 3 - i) = \underline{-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i}.$$

2. $\int\limits_0^{i} z\, e^z\, dz.$

Integrand je analitička funkcija po čitavoj ravnini z. Prethodno izračunajmo neodređeni integral $\int z\, e^z\, dz$ po pravilu parcijalne integracije $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$:

$$\int z\, e^z\, dz = [u = z,\ du = dz;\ v = e^z,\ dv = e^z\, dz] = z\, e^z - \int e^z\, dz = z\, e^z - e^z.$$

Slijedi:

$$\int_0^i z e^z \, dz = \left| z e^z - e^z \right|_0^i = i e^i - e^i + 1 = \underline{1 + e^i (i - 1)} = 1 + (\cos 1 + i \sin 1)(i - 1) =$$

$$= (1 - \sin 1 - \cos 1) + i (\cos 1 - \sin 1) \doteq \underline{-0{,}381 - i\, 0{,}301}.$$

3. $I = \oint\limits_C \frac{dz}{(z-a)^n}$ po zatvorenoj konturi C, dok je n cio broj. Za $n < 0$ podintegralna funkcija $\frac{1}{(z-a)^n} = (z-a)^m$, gdje je $m = -n > 0$, analitička je funkcija po čitavoj ravnini z pa prema Cauchyjevoj formuli $I = 0$.

Očito je da je $I = 0$ i kad je $n > 0$ ukoliko točka $z = a$ leži izvan područja D ograničenog konturom C. Neka je sad $n > 0$, pri čemu točka a pripada navedenom području.

Povučemo neku kružnicu K polumjera R sa središtem u točki $z = a$, koja ne siječe konturu C.

Jednadžba te kružnice glasi $z = a + R e^{it}$.

Funkcija $\frac{1}{(z-a)^n}$ $(n > 0)$ je analitička u prstenu između K i C, a stoga prema formulama (31)' i (30)'', obilazeći K i C jedamput u pozitivnom smislu, imat ćemo, uzevši u obzir da uz $z - a = R e^{it}$

$$\frac{1}{(z-a)^n} = \frac{1}{R^n e^{int}} \quad \text{i} \quad z'(t) = R e^{it} i \, dt,$$

$$I = \oint\limits_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{R i e^{it} \, dt}{R^n e^{int}} = \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} \, dt.$$

Odatle za $n = 1$ dobivamo

$$I = i \int_0^{2\pi} dt = \underline{2 \pi i},$$

a za $n > 1$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ imamo

$$I = \frac{i}{R^{n-1}} \left| \frac{e^{i(1-n)t}}{i(1-n)} \right|_0^{2\pi} = \frac{i}{R^{n-1}} \cdot \frac{1}{i(1-n)} \left| e^{i(1-n)t} \right|_0^{2\pi} = 0,$$

jer je $e^{2\pi i(1-n)} = e^0 = 1$.

Dakle, ako kontura C obilazi jednokratno točku a u pozitivnom smislu, to za po volji odabran cijeli n vrijedi

$$\oint\limits_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad n \neq 1 \\ 2 \pi i & \text{za} \quad n = 1. \end{cases}$$

4. $\int_i^{1+i} z^2 \, dz.$ $\left[-\frac{2}{3} + i \right].$

5. $\int_i^{-i} \frac{dz}{z^2}.$ $[-2i].$

§ 14. CAUCHYJEVA INTEGRALNA FORMULA. CAUCHYJEV INTEGRAL I NJEGOVA PRIMJENA U RAČUNANJU KONTURNIH INTEGRALA

Navedimo još Cauchyjevu integralnu formulu i njenu primjenu.

Neka je funkcija $f(z)$ analitička u zatvorenom području $\bar{D}$ (jednostruko ili višestruko suvislom), pri čemu je C granica područja D.

Uz te pretpostavke možemo vrijednost funkcije $z = f(z)$ u bilo kojoj točki z područja D izračunati, ako znamo samo vrijednost $f(z)$ na granici C tog područja i to po formuli

$$f(z) = \frac{1}{2 \pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta) \, d\zeta}{\zeta - z}, \tag{34}$$

pri čemu se granica C obilazi u pozitivnom smislu.

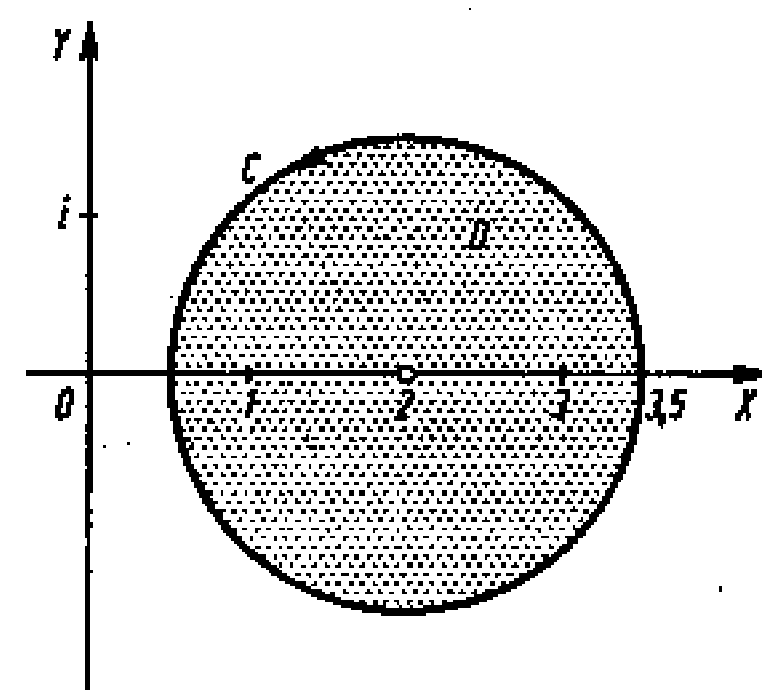
Integral na desnoj strani formule zove se Cauchyjev integral za funkciju $f(z)$, a formula sama zove se Cauchyjeva integralna formula.

Za računanje Cauchyjeva integrala treba samo znati da je integral analitičke funkcije uzet uzduž bilo koje zatvorene krivulje, koja se nalazi u jednostruko suvislom području pravilnih, tj. nesingularnih točaka, jednak nuli, dok je taj integral jednak $2 \pi i$, ukoliko ta zatvorena krivulja zaokružuje pol funkcije.

Pomoću Cauchyjeva integrala, koji lako dobivamo iz (34)

$$I = \int\limits_C \frac{f(\zeta) \, d\zeta}{\zeta - z} = 2 \pi i f(z) \qquad (34)'$$

možemo izračunati neke konturne integrale po zatvorenim konturama.



Slika 46.

Primjeri

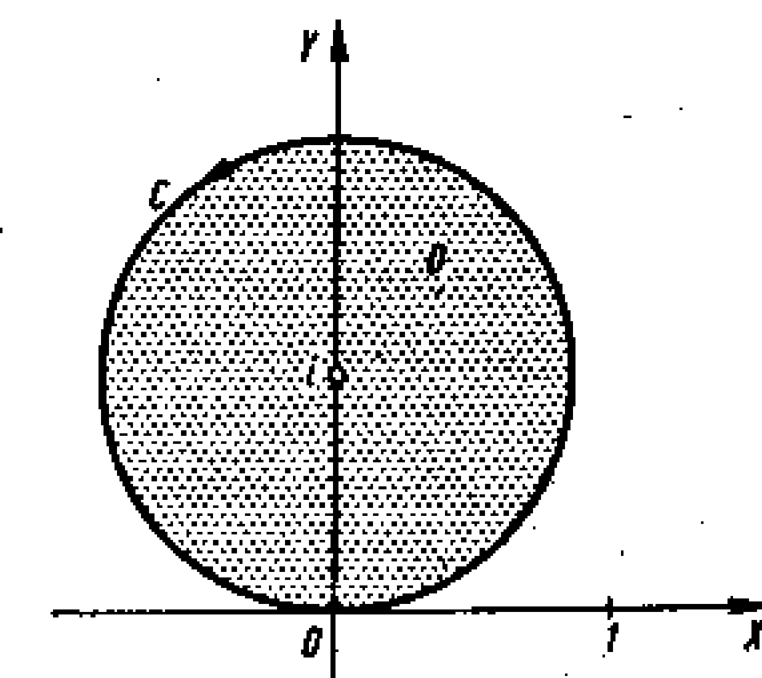
Izračunaj

1. $\oint\limits_C \frac{e^z \, dz}{z(z-3)}$, gdje je C kružnica polumjera $\frac{3}{2}$ sa središtem u točki $z = 2$. Vidi sliku 46.

Funkcija $f(z) = \frac{e^z}{z}$ je analitička funkcija u zadanom području ~~$\bar{D}$~~ pa prema (34)' imamo $f(3) = \frac{e^3}{3}$, pa je

$$I = 2 \pi i \cdot \frac{e^3}{3} = \underline{\frac{2}{3} \pi e^3 i}.$$

2. $\oint\limits_C \frac{dz}{z^2 + 1}$, gdje je C kružnica polumjera 1 sa središtem u točki i. Vidi sliku 47.



Slika 47.

Napišemo li zadani integral u obliku $\oint\limits_C \frac{dz}{(z+i)(z-i)}$, imat ćemo: $f(z) = \frac{1}{z+i}$ je analitička funkcija u području D, pa je prema (34)′ $f(i) = \frac{1}{2i}$ i

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \underline{\pi}.$$

3. $\oint\limits_C \frac{z^3 dz}{z-i}$, gdje je C kružnica polumjera 2 sa središtem u točki $2i$. Nariši sliku!

Funkcija $f(z) = z^3$, je analitička u zadanom području, pa je prema (34)′ $f(i) = i^3 = -i$ i $I = 2\pi i \cdot (-i) = \underline{2\pi}$.

Da smo za C uzeli npr. kružnicu $|z| = \frac{1}{2}$, dobili bismo $\underline{I = 0}$, jer u tom području integrand nema pola!

4. $\oint\limits_C \frac{\cos z\, dz}{z+2i}$, gdje je C kružnica polumjera 2 sa središtem u točki $-i$. Nariši sliku!

Funkcija $f(z) = \cos z$ je analitička u zadanom području pa prema (34)′: $f(-2i) = \cos(-2i) = \cos 2i = $ [prema (18)] $= \frac{e^2 + e^{-2}}{2}$ i

$$I = 2\pi i \cdot \frac{e^2 + e^{-2}}{2} = \underline{\pi (e^2 + e^{-2})\, i}.$$

5. $\oint\limits_C \frac{z\, dz}{z^4 - 1}$, gdje je C kružnica polumjera 2 sa središtem u točki 2. Nariši sliku!

Napišemo li zadani integral u obliku

$$\oint\limits_C \frac{z\, dz}{(z^2+1)(z+1)(z-1)}, \text{ bit će } f(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z+1)}$$

analitička funkcija u zadanom području pa prema (34)′ imamo $f(1) = \frac{1}{4}$ i

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{4} = \underline{\frac{1}{2}\pi i}.$$

6. $\oint\limits_C \frac{e^z dz}{z^2 - 3z}$ po $|z| = 1$, tj. po jediničnoj kružnici sa središtem u ishodištu.

$$f(z) = \frac{e^z}{z-3}; \qquad f(0) = \frac{1}{-3},$$

pa je

$$I = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \underline{-\frac{2}{3}\pi i}.$$

7. $\oint\limits_C \frac{z\, dz}{z-3}$ po $|z| = 5$. [$6\pi i$].

8. $\oint\limits_C \frac{(z+2)\, dz}{z^2 - 1}$ po $|z| = 2$. [$2\pi i$].

9. $\oint\limits_C \frac{\sin z}{z^2+1} dz$ po $|z| = 2$. [$2\pi i \cdot \text{sh } 1$].

Pomoću Cauchyjeve formule može se pokazati da funkciju analitičku u zatvorenom području D možemo derivirati u svakoj točki tog područja koliko god puta pa prema (34)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

dobivamo:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \qquad f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta, \ldots,$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

gdje je ζ kompleksna promjenljiva integracije.

Odatle slijedi:

Ako jednoznačna funkcija $f(z)$ ima posvuda u području D prvu derivaciju, ona ima u tom području i derivacije svih viših redova.

Očito je da taj stavak potvrđuje ne samo postojanje derivacija bilo kojeg reda za funkciju analitičku u području D, već i *neprekinutost* tih derivacija. Poznato je da u slučaju funkcije realne promjenljive iz postojanja konačne derivacije ne slijedi i neprekinutost te derivacije.

Pomoću formule (35) možemo izračunati neke konturne integrale. U tu svrhu napišemo je u obliku:

$$\oint\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z). \qquad (35)'$$

Navedimo nekoliko primjera.

Primjeri

Izračunaj.

1. $\oint\limits_C \frac{e^z dz}{(z-i)^3}$, gdje je C zatvorena kontura po volji po kojoj se vrši obilaženje u pozitivnom smislu oko točke i.

Funkcija e^z je analitička u području omeđenom konturom C, pa uzevši u obzir da je prema formuli (35)′ $n + 1 = 3$, odnosno $n = 2$ i da je $f''(z) = e^z$, odnosno $f''(i) = e^i$,

dobivamo prema toj formuli

$$I = \frac{2\pi i}{2!}\, e^{i} = \pi i\, e^{i} = \pi i (\cos 1 + i \sin 1) = \underline{\pi (i \cos 1 - \sin 1)}.$$

2. $\oint\limits_C \frac{z\, e^z}{(z-1)^4}\, dz$, gdje je C kružnica $|z| = 2$. Nariši sliku!

Funkcija $f(z) = z\, e^z$ je analitička, u zadanom području. Računamo prema (35)′ uzevši u obzir da je $n + 1 = 4$, pa je $n = 3$:

$$f'(z) = z\, e^z + e^z; \quad f''(z) = z\, e^z + 2\, e^z; \quad f'''(z) = z\, e^z + 3\, e^z,$$

a odatle je $f'''(1) = 4\, e$.

$$I = \frac{2\pi i}{3!} \cdot 4\, e = \underline{\frac{4}{3}\pi e\, i.}$$

3. $\oint\limits_C \frac{dz}{z^3(z+4)}$, gdje je C kružnica $|z| = 2$.

$f(z) = \frac{1}{z+4}$ je analitička funkcija u zadanom području. Kako je $n = 2$ računamo:

$$f'(z) = -\frac{1}{(z+4)^2}; \quad f''(z) = \frac{2}{(z+4)^3},$$

pa je $f''(0) = \frac{2}{4^3}$.

$$I = \frac{2\pi i}{2!} \cdot \frac{2}{4^3} = \underline{\frac{\pi i}{32}}.$$

4. $\oint\limits_C \frac{\sin z}{z^4}\, dz$, gdje je C kružnica $|z| = 1$.

Kako je $f(z) = \sin z$ analitička funkcija, dok je $n = 3$, računamo:

$$f'(z) = \cos z; \quad f''(z) = -\sin z; \quad f'''(z) = -\cos z \quad \text{i} \quad f'''(0) = -1.$$

$$I = \frac{2\pi i}{3!}(-1) = \underline{-\frac{\pi i}{3}}.$$

5. $\oint\limits_C \frac{\cos z}{z^3}\, dz$ po $|z| = 1$.

$f(z) = \cos z$ je analitička funkcija, $n = 2$.

Računamo

$$f'(z) = -\sin z \quad \text{i} \quad f''(z) = -\cos z,$$

pa je $f''(0) = -1$.

$$I = \frac{2\pi i}{2!}(-1) = \underline{-\pi i.}$$

6. $\oint\limits_C \frac{z^4\, dz}{(z+1)^3}$ po $|z| = 2$. [$12\pi i$].

§ 15. REZIDUI ANALITIČKE FUNKCIJE I NJIHOVA PRIMJENA

Pomoću Cauchyjeve integralne formule izračunali smo niz konturnih integrala funkcije $f(z)$. Pokažimo sada, kako se mogu ti integrali rješavati pomoću takozvanih *rezidua*. U vezi s tim osvrnut ćemo se ukratko na razvoj funkcije $f(z)$ u red potencija i na singularne točke te funkcije.

1. Redovi Taylorovi i Laurentovi za funkcije $f(z)$

Funkcije $f(z)$ možemo razviti u **Taylorov red**

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \tag{36}$$

u bilo kojem otvorenom krugu sa središtem u točki a, u kojem je ta funkcija analitička. U svakom drugom području, koje spada u taj krug, Taylorov red konvergira uniformno.

Navedimo Taylorove redove za neke elementarne funkcije $f(z)$:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \qquad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \qquad \operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

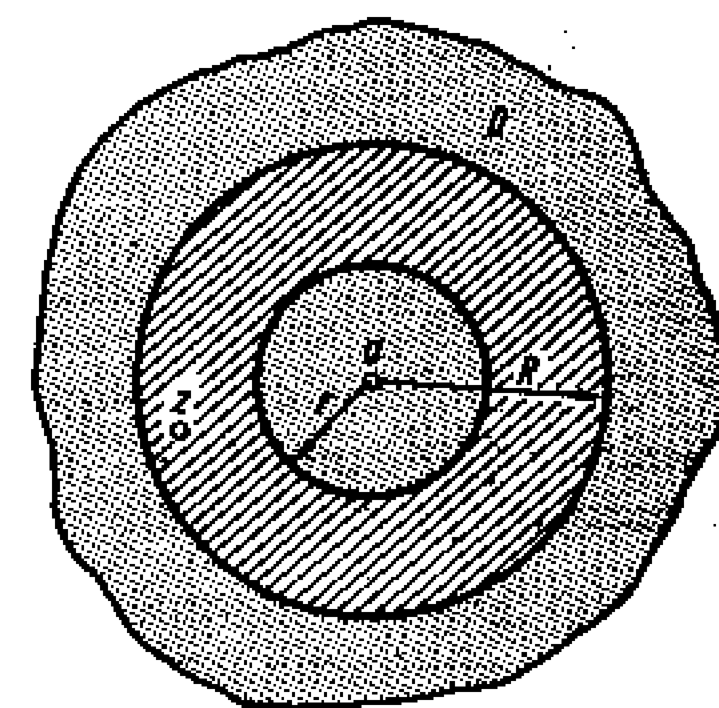
Ti redovi konvergiraju za sve vrijednosti z.

$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots$ konvergira za $|z| < 1$.

Kako vidimo, ti redovi imaju isti oblik kao u realnom području i izvode se na isti način.

Taylorovi redovi podesni su za predočenje funkcija analitičkih u kružnim područjima. Međutim, često je potrebno proučavanje funkcija, koje su analitičke posvuda u nekom okolišu točke a izostavljajući tu točku, tj. analitičke u prstenastom području

$r < |z - a| < R$. Vidi sliku 48.



Slika 48.

Pokazuje se da se takve funkcije mogu razviti u red po pozitivnim i negativnim potencijama $(z - a)$. Takav se red zove **Laurentov** (Loranov) **red** i ima oblik

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n =$$
$$= \cdots + c_{-n}(z-a)^{-n} + c_{-n+1}(z-a)^{-n+1} + c_{-n+2}(z-a)^{-n+2} + \cdots$$
$$\cdots + c_{-1}(z-a)^{-1} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \cdots =$$
$$= \cdots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \frac{c_{-n+2}}{(z-a)^{n-2}} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \cdots . \qquad (37)$$

Vidimo da se Laurentov red raspada u dva dijela:

red $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ s negativnim potencijama $(z-a)$, to je *glavni dio Laurentova reda* i

red $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ s pozitivnim potencijama $(z-a)$, to je *pravilni dio Laurentova reda.*

Ako je glavni dio Laurentova reda jednak nuli, Laurentov red postaje Taylorov red, koji je prema tome specijalni slučaj Laurentova reda i to Laurentov red za funkciju $f(z)$ analitičku u krugu $0 < |z-a| < R$. Primijetimo usput: da funkcija $f(z)$ ima u točki a pol, nužno je i dovoljno da glavni dio Laurentova reda za tu funkciju $f(z)$ sadrži u okolišu točke a samo konačni broj članova, tj. da ima oblik

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

pri čemu se eksponent najvišeg negativnog člana reda podudara s redom pola. Da to shvatimo, kazat ćemo nekoliko riječi o *singularnim točkama funkcije* $f(z)$.

2. Singularne točke funkcije $f(z)$

Znamo već da se točke ravnine Z, u kojim je funkcija $f(z)$ analitička, zovu *regularne* (*pravilne*) *točke*. Točke, u kojima funkcija $f(z)$ nije analitička zovemo *singularne* (*posebne*) *točke.*

Razlikujemo nekoliko tipova singularnih točaka. Točka $z = a$ zove se *izolirana singularna točka* funkcije $f(z)$, ako postoji okoliš točke $z = a$, u kojem je ta točka jedina singularna točke funkcije $f(z)$. Ako je točka $z = a$ izolirana singularna točka funkcije $f(z)$, tada postoji dovoljno malen prsten $r < |z-a| < R$ u kojem je funkcija $f(z)$ analitička i u kojem se ta funkcija dade razviti u Laurentov red.

Kod toga mogu nastupiti tri slučaja:

I. *Laurentov red ne sadrži glavni dio* pa ima oblik

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots .$$

Suma reda je analitička funkcija u krugu $|z-a| < R$, pri čemu u svim točkama toga kruga red konvergira prema $f(z)$, a u točki $z = a$, gdje $f(z)$ nije analitička, prema broju c_0. Singularna točka $z = a$ zove se u tom slučaju *singularna točka koja se da ukloniti.* Uzmemo li da je $f(a) = c_0$, tada navedeni razvoj vrijedi za čitav krug $|z-a| < R$, dakle i za njegovo središte $z = a$, pa $f(z)$ postaje analitička funkcija i u točki a. Kao primjer navedimo funkciju $f(z) = \sin z$, kojoj je $z = 0$ singularna točka, koja se da ukloniti.

Napišemo li tu funkciju u obliku $f(z) = \frac{1}{z}\sin z$, možemo je lako razviti u Laurentov red:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots$$

u kojem nema glavnog dijela, pa slijedi gore navedena tvrdnja. Uzmemo li da je $f(0) = 1$, funkcija $f(z)$ postaje analitička i u točki $z = 0$.

II. *Laurentov red sadrži u svom glavnom dijelu konačan broj članova* te ima oblik

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

gdje je $c_{-m} \neq 0$.

U tom je slučaju točka $z = a$ *pol* funkcije $f(z)$ i to m-tog reda, tj. najviši negativni indeks koeficijenta c pokazuje red pola. Drugim riječima, kao i u realnom području vrijedi pravilo: da funkcija $f(z)$ ima za $z = a$ pol m-tog reda nužno je i dovoljno da je $z = a$ nultočka m-tog reda funkcije $F(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Npr. funkcija $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^4}$ ima u točki $z = 0$ pol drugog reda, jer Laurentov red te funkcije glasi:

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left[1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2!\, z^2} - \frac{1}{4!} + \frac{z^2}{6!} - \frac{z^4}{8!} + \cdots$$

pa vidimo da glavni dio razvoja sadrži samo jedan član kojemu je koeficijent $c_{-2} = 2$. Također vidimo da $f(z) \to \infty$, kad $z \to 0$, pa je $z = 0$ pol II reda te funkcije.

III. *Laurentov red sadrži u svojem glavnom dijelu beskonačno mnogo članova.*

U tom slučaju je točka $z = a$ *bitno singularna točka* funkcije $f(z)$. U toj singularnoj točki funkcija nije određena.

Kao primjer navedimo funkcije $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, za koju je $z = 0$ bitno singularna točka.

Za $\frac{1}{z} = t$ dobivamo funkciju e^t, koja je analitička po čitavoj ravnini t, te uz $t < \infty$ predočena je redom

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots$$

Uzmemo li $t = \frac{1}{z}$, dobit ćemo da je funkcija $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ analitička za $z > 0$, a predočena je redom

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!\,z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \dots$$

koji sadrži u glavnom dijelu beskonačno mnogo članova, pa je $z = 0$ bitno singularna točka funkcije $f(z)$.

Općenito se može kazati: da funkcija $f(z)$ ima u točki $z = a$ singularnu točku, koja se da ukloniti, pol ili bitno singularnu točku u zavisnosti od toga, da li je $\lim_{z\to a} f(z)$ konačan, beskonačan ili ne postoji.

3. Pojam reziduuma, njegovo određivanje i primjena pri rješavanju konturnih integrala

Sada kad smo upoznali Laurentov red za funkciju $f(z)$ i vrste singularnih točaka lako ćemo shvatiti kako se rješavaju konturni integrali po zatvorenim konturama pomoću rezidua.

Ilustrirujući primjenu Cauchyjeve integralne formule riješili smo integral $\oint_C \frac{\cos z}{z^3}$ pa smo dobili za rezultat $-\pi i$ uzevši za C kružnicu $|z| = 1$. (Vidi u § 14 primjer 5). Riješimo sad taj integral na drugi način i to tako da integrand razvijemo u Mac Laurinov, odnosno u Taylorov red oko singularne točke $z = 0$.

Dobivamo

$$\frac{\cos z}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2!\,z} + \frac{z}{4!} - \frac{z^3}{6!} + \dots .$$

Opažamo da desna strana gornje jednakosti predočuje Laurentov red za $a = 0$, koji ima u glavnom dijelu samo dva člana $\frac{1}{z^3}$ i $-\frac{1}{2!\,z}$, dok je pravilni dio reda beskonačan.

Budući da glavni dio Laurentova reda ima konačan broj članova i da je eksponent najvišeg negativnog člana tog dijela reda -3, zaključujemo da je $z = 0$ pol III. reda integranda.

Da izračunamo zadani integral, integrirajmo član po član dobiveni Laurentov red. Neodređeni integral svakog člana reda osim drugoga dat će jednoznačnu analitičku funkciju pa će pripadni integrali po zatvorenoj konturi biti jednaki nuli.

Što se tiče integrala drugog člana, za nj ćemo dobiti

$$\oint_C \left(-\frac{1}{2!\,z}\right) dz = -\frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2}\cdot 2\pi i = -\pi i,$$

pa je

$$\oint_C \frac{\cos z}{z^3}\,dz = -\frac{1}{2}\cdot 2\pi i = \underline{-\pi i}.$$

Opažamo da je $-\frac{1}{2}$ koeficijent c_{-1} člana $\frac{c_{-1}}{z}$ Laurentova reda pa možemo napisati da je

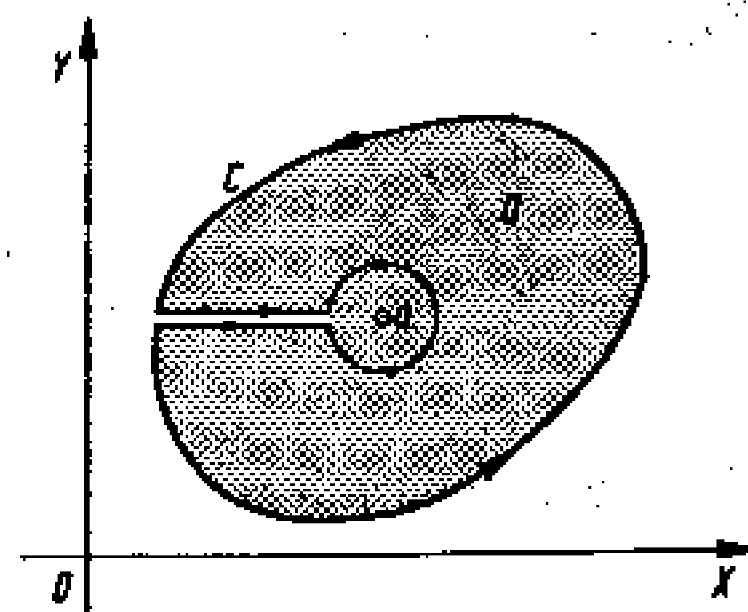
$$\oint_C \frac{\cos z}{z^3} = c_{-1}\,2\pi i = -\frac{1}{2}\cdot 2\pi i = \underline{-\pi i}.$$

Uzmimo općenito: Neka treba izračunati integral

$$\oint_C f(z)\,dz \tag{a}$$

po konturi C koja obilazi pol $z = a$ u pozitivnom smislu i koja ne sadrži u tom području druge singularne točke. Od zadanog integrala prelazimo na malu kružnicu sa središtem u točki a, a u okolišu te točke razvijemo integrand u Laurentov red. Vidi sl. 49. Kao u navedenom primjeru nakon integriranja po zatvorenoj konturi integrali svih članova će se poništiti osim

$$\oint_C \frac{c_{-1}}{z-a}\,dz = 2\pi i\,c_{-1}.$$



Slika 49.

Tu vrijednost ima i čitav zadani integral (a).

Koeficijent c_{-1} kod $(z-a)^{-1}$ u Laurentovu redu ima posebno ime *residuum* (ostatak) funkcije $f(z)$ u točki a, dok se simbolički označuje s

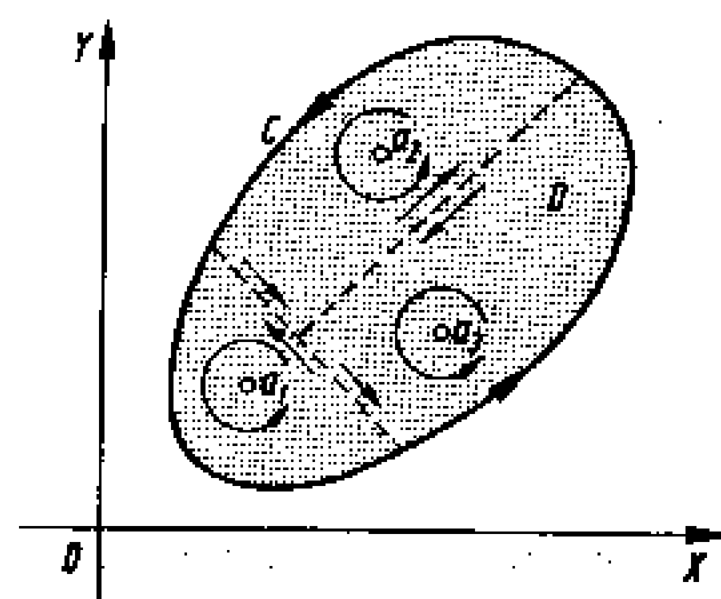
$$\operatorname{Res} f(z), \quad \text{pa je} \quad \operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = c_{-1}.$$

Odatle slijedi da je

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = 0, \quad \text{ako je} \quad c_{-1} = 0,$$

npr. u slučaju, kad Laurentov red nema glavnog dijela, tj. u regularnoj i u singularnoj točki, koja se dâ ukloniti.

Prema tome imamo novu formulu za računanje integrala po konturama koje sadrže singularnu točku $z = a$:



Slika 50.

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = 2\pi i c_{-1}. \quad (37)$$

Pretpostavimo da treba izračunati integral po konturi C, pri čemu je integrand $f(z)$ jednoznačna i analitička funkcija svuda na konturi C i unutar te konture osim nekog broja singularnih točaka. Vidi sliku 50, na kojoj su prikazane tri takve točke a_1, a_2 i a_3. Pomoću crta, koje su na slici 50 prikazane isprekidanim pravcima, područje D omeđeno konturom C podijeljeno je na dijelove tako, da se u svakom dijelu nalazi jedna singularna točka. Označivši s C_1, C_2 i C_3 konture tih dijelova i obilazeći ih u pozitivnom smislu dobit ćemo

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \oint_{C_3} f(z)\,dz \quad (38)$$

jer se integrali uzeti po pomoćnim crtama uzajamno poništavaju.

Budući da konture C_1, C_2 i C_3 sadrže samo po jednu singularnu točku, svaki integral naveden u desnoj strani formule (38) izračunava se po formuli (37), pa dobivamo:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=a_1} f(z) + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=a_2} f(z) + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=a_3} f(z) =$$

$$= 2\pi i \left[\operatorname*{Res}_{z=a_1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=a_2} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=a_3} f(z)\right] \quad (38)'$$

ili za k singularnih točaka

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z). \quad (38)''$$

To je Cauchyjev osnovni teorem o reziduima, koji glasi: Ako je funkcija $f(z)$ analitička u području D i na zatvorenoj konturi C, koja ga omeđuje, i to svuda osim konačnog broja singularnih točaka $a_1, a_2, \ldots, a_k$, koje leže unutar

C, tada integral funkcije $f(z)$ uzduž C u pozitivnom smislu jednak je umnošku $2\pi i$ i zbroja rezidua $f(z)$ u svim točkama a_k.

Određivanje rezidua funkcije $f(z)$ u konačnoj *bitno singularnoj točki* vrši se obično tako da se neposredno određuju koeficijenti Laurentova reda u okolišu te točke.

Za određivanje rezidua funkcije $f(z)$ u *polovima* postoji mnogo jednostavniji način.

Pol I reda nastaje obično kad integrand $f(z)$ imá oblik kvocijenta dviju konačnih funkcija

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

pri čemu je u nekoj točki $z = a$ brojnik različit od nule, a nazivnik ima nultočku I reda. Može se pokazati da je u tom slučaju

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{g(a)}{h'(a)}. \quad (39)$$

Reziduum u polu m-tog reda računa se po formuli

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{m-1}[f(z)\cdot(z-a)^m]}{dz^{m-1}}, \quad (40)$$

gdje je m red pola.

Navedimo primjere za računanje rezidua funkcija $f(z)$.

Primjeri

Izračunaj rezidue funkcija $f(z)$ u svim singularnim točkama ravnine Z,

1. $f(z) = \dfrac{2}{z-1}$.

Zadana funkcija je analitička u svim točkama ravnine Z osim točke $z = i$ gdje ima pol I reda, jer se u toj točki nazivnik funkcije poništava, dok je brojnik različit od nule.

Reziduum funkcije u toj točki računamo prema formuli (39):

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{g(a)}{h'(a)}:$$

U našem slučaju imamo: $g(a) = 2$; $h(z) = z - i$, $h'(z) = 1$ pa je $h'(a) = 1$. Slijedi:

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{2}{1} = \underline{2.}$$

2. $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$.

Zadana funkcija je analitička na čitavoj ravnini Z osim polova $z_1 = 1$ I reda i $z_2 = 2$ II reda.

Za pol $z_1 = 1$ računamo reziduum prema (39) uzevši u obzir da je $g = \frac{z}{(z-2)^2}$ i $h = z - 1$, dok je $h' = 1$, pa za $a = 1$ dobivamo

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{1} = \underline{1.}$$

Za pol II reda $z_2 = 2$ reziduum odredimo prema formuli (40) uzevši za naš slučaj $m = 2$, pa je $m - 1 = 1$.

Računamo:

$$f(z)\cdot(z-2)^m = f(z)\cdot(z-2) = \frac{z\cdot(z-2)^2}{(z-1)(z-2)^2} = \frac{z}{z-1},$$

pa je

$$\frac{d\left[\frac{z}{z-1}\right]}{dz} = -\frac{1}{(z-1)^2}.$$

Dobivamo:

$$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 2}\left[-\frac{1}{(z-1)^2}\right] = \underline{-1.}$$

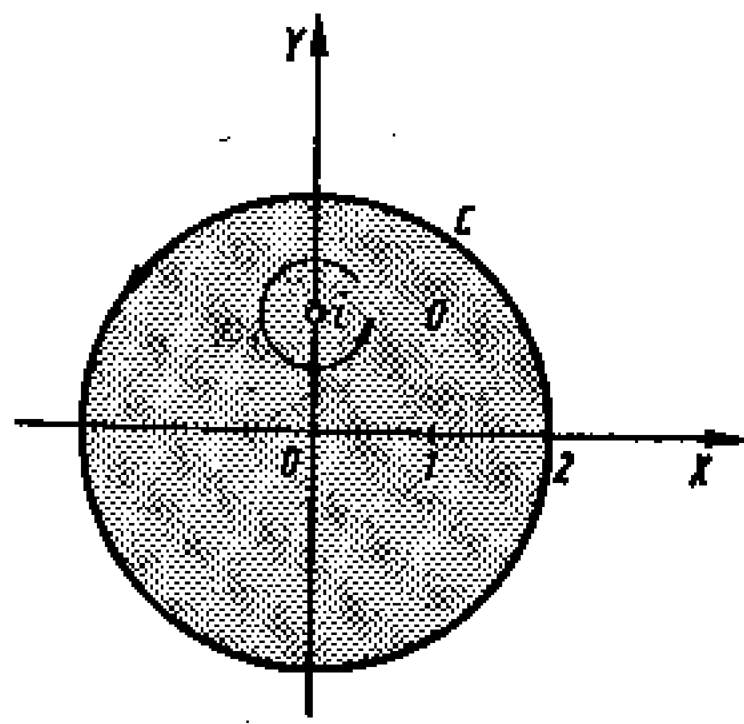
3. $f(z) = \frac{z e^z}{z^2-1}$. $\left[\frac{e}{2};\ \frac{e^{-1}}{2}\right]$.

Sada kad znamo odrediti rezidue funkcija $f(z)$, lako ćemo izračunati i integrale analitičkih funkcija po konturama, koje okružuju singularne točke podintegralnih funkcija.

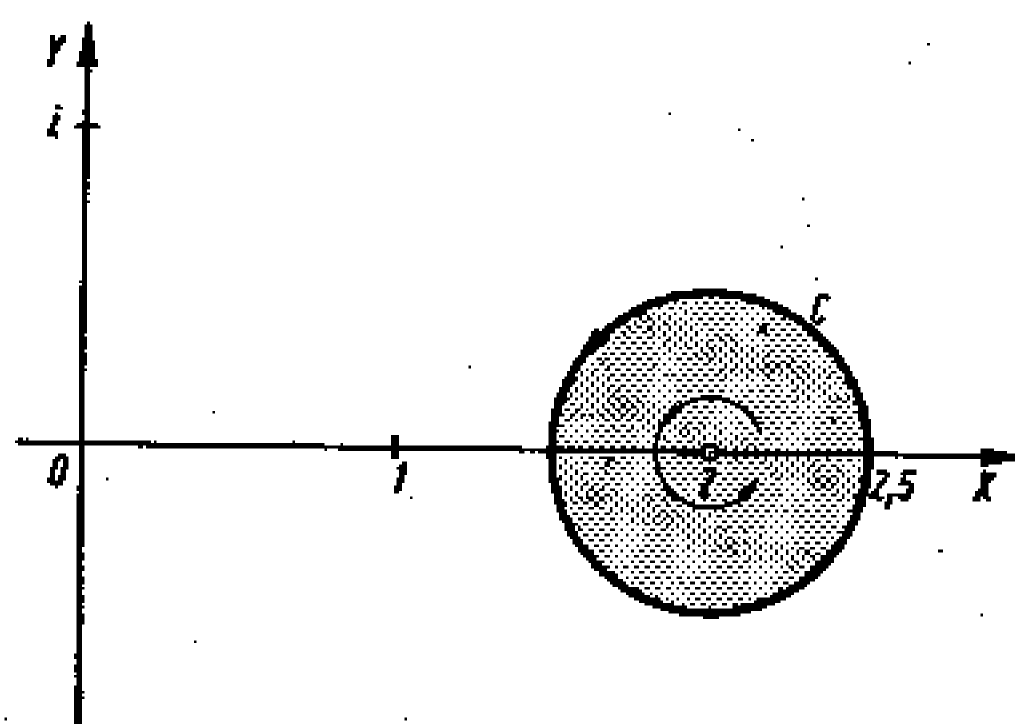
Primjeri

Izračunaj integrale po zatvorenim konturama.

1. $\oint_C \frac{2}{z-i}\,dz$, gdje je C kružnica $|z| = 2$. Vidi sliku 51.



Slika 51.



Slika 52.

U primjeru 1. pokazali smo malo prije da analitička funkcija $f(z) = \frac{2}{z-i}$ ima po čitavoj ravnini Z jednu singularnu točku i to pol I reda u $z = i$ i da je $\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = 2$.

Prema osnovnom Cauchyjevu teoremu (38) vrijednost I zadanog integrala glasi

$$I = 2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i\cdot 2 = \underline{4\pi i.}$$

2. $\oint_C \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$, gdje je C kružnica $|z-2| = \frac{1}{2}$. Vidi sliku 52.

I za funkciju $\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ pokazali smo malo prije da je analitička po čitavoj ravnini z osim u singularnim točkama $z_1 = 1$ i $z_2 = 2$, u kojim ima pol I, odnosno II reda i da su $\operatorname*{Res}_{z_1=1} f(z) = 1$ i $\operatorname*{Res}_{z_2=2} f(z) = -1$. Međutim, a to se vidi na slici 52, pol $z_1 = 1$ leži izvan područja $|z-2| = \frac{1}{2}$, pa prema (38) zadani integral ima vrijednost

$$I = 2\pi i\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = 2\pi i\cdot(-1) = \underline{-2\pi i.}$$

3. $\oint_C \frac{\cos z}{z^3}\,dz$, gdje je C kružnica $|z| = 1$.

Taj integral već smo riješili dvaput: prvi put pomoću Cauchyjeve integralne formule (vidi primjer 5. u § 14), a drugi put odredivši reziduum podintegralne funkcije pomoću Laurentova reda. Riješimo sad taj integral tako da reziduum odredimo pomoću formule (40). Uzevši u obzir da je $z = 0$ pol III reda integranda, dobivamo

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{\cos z}{z^3}\cdot z^3\right]_{z=0} = \frac{1}{2}\Big|-\cos z\Big|_{z=0} = -\frac{1}{2},$$

pa je

$$I = 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{-\pi i.}$$

4. $\oint_C \frac{(z+1)\,dz}{(z-1)\sin z}$, gdje je C kružnica $|z| = 2$.

Opažamo da analitička podintegralna funkcija ima singularitete u točkama u kojim se samo nazivnik pretvara u nulu i to za $z_1 = 1$ i $z_2 = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Od tih točaka u krugu omeđenom sa C nalaze se samo 2 točke $z_1 = 1$ i $z_2 = 0$. Nariši sliku!

Prema (38) imamo:

$$I = 2\pi i\,[\operatorname*{Res}_{z_1=1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z_2=0} f(z)].$$

Budući da su obje nul-točke polovi prvoga reda integranda, rezidue računamo prema (39) uzevši u obzir da je $g(z) = z + 1$, $h(z) = (z-1)\sin z$ i $h' = (z-1)\cos z + \sin z$.

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{g(0)}{h'(0)} = \frac{1}{-1} = -1; \qquad \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \frac{2}{\sin 1},$$

pa je

$$I = 2\pi i\left(-1 + \frac{2}{\sin 1}\right) \doteq 6{,}283\, i\left(-1 + \frac{2}{0{,}842}\right) = \underline{8{,}65\, i.}$$

5. $\oint_C \frac{z^6}{(z-1)^4}\,dz$, gdje je C zatvorena krivulja oko točke $z = 0$.

Funkcija $f(z)$ je analitička u svim točkama područja osim u točki $z = 1$, gdje ima pol IV reda.

Prema (40):

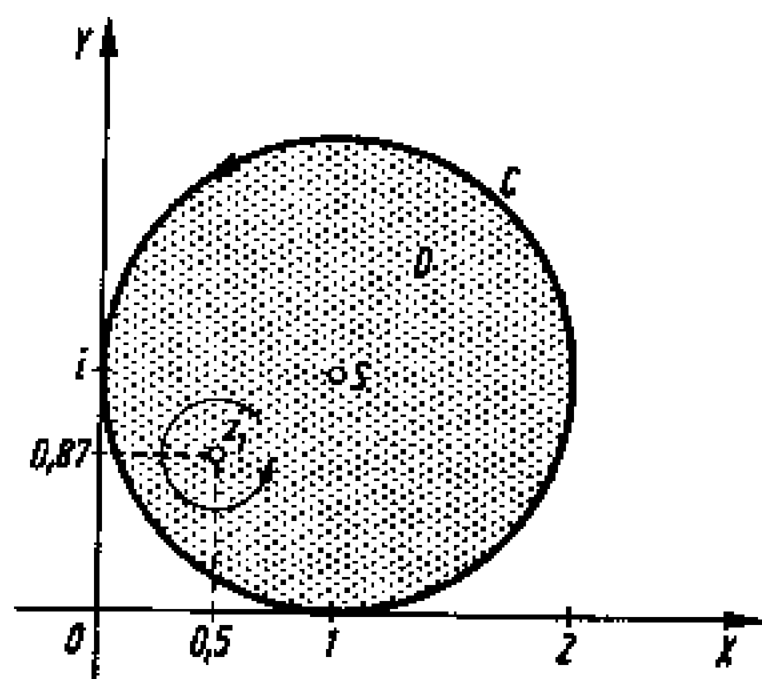
$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z^6}{(z-1)^4} = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}\left\{(z-1)^4\cdot\frac{z^6}{(z-1)^4}\right]_{z=1} = \frac{1}{6}(6\cdot 5\cdot 4) = 20.$$

$$I = 2\pi i\cdot 20 = \underline{40\pi i.}$$

6. $\oint\limits_C \frac{dz}{z^3+1}$, gdje je C kružnica $|z-(1+i)|=1$. Vidi sl. 53.

Funkcija $f(z)$ je analitička posvuda osim nultočaka nazivnika, tj. korijena jednadžbe $z^3+1=0$, gdje ima polove I reda. Tu jednadžbu znamo riješiti (vidi § 2.5). Dobivamo:

$$z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\quad z_2=-1 \text{ i } z_3=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$



Slika 53.

Kako se vidi na slici 53, u zadanom području D, nalazi se samo prvi pol $z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \doteq 0{,}5+i\,0{,}87$.

Računamo:

$$I=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=z_1}\frac{1}{(z^3+1)'}=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=z_1}\frac{1}{3z^2}=$$

$$=\frac{2}{3}\pi i\frac{1}{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{8}{3}\pi i\frac{1}{-2+i2\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{4}{3}\pi i\frac{1}{-1+i\sqrt{3}}=-\frac{4}{3}\pi i\frac{1+i\sqrt{3}}{4}=$$

$$=\frac{\pi}{3}(\sqrt{3}-i).$$

7. $\oint\limits_C \frac{\operatorname{ctg} z}{4z-\pi}\,dz$, gdje je C kružnica $|z|=1$.

Napišemo li $f(z)$ u obliku $f(z)=\frac{\cos z}{(4z-\pi)\sin z}$, opazit ćemo da funkcija $f(z)$ ima polove u točkama $z_1=\frac{\pi}{4}$ i $z_k=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

Polovi su I reda, jer je i za $\sin k\pi=0$ $|(\sin z)'|_{z=k\pi}=\cos k\pi\neq0$.

Unutar kružnice C nalaze se samo dva pola $z_1=\frac{\pi}{4}$ i $z_2=0$ (za $k=0$).

Računamo prema (39):

$$\operatorname*{Res}_{z_1=\pi/4} f(z)=\left|\frac{\operatorname{ctg} z}{(4z-\pi)'}\right|_{z_1=\pi/4}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}{4}=\frac{1}{4}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z_2=0} f(z)=\left|\frac{\cos z}{[\sin z\cdot(4z-\pi)]'}\right|_{z_2=0}=\left|\frac{\cos z}{4\sin z+4z\cos z-\pi\cos z}\right|_{z_2=0}=\frac{1}{-\pi}.$$

Prema (38)'':

$$I=2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi}\right).$$

8. $\oint\limits_C \frac{z\,e^z}{z^2-1}\,dz$, gdje je C kružnica $|z|=2$. $\left[2\pi i\left(\frac{e}{2}+\frac{e^{-1}}{2}\right)=2\pi i\operatorname{ch} i\right]$.

9. $\oint\limits_C \frac{e^{3z}\,dz}{z^2+4}$, gdje je C kružnica $|z|=3$. $\left[I=2\pi i\cdot\frac{1}{4}(1-1+i-i)=0\right]$.

10. $\oint\limits_C \frac{z^3}{z^2-1}\,dz$, gdje je C kružnica $|z|=2$. $[2\pi i\cdot1]$.

11. $\oint\limits_C \frac{z\,dz}{z^4-1}$, gdje je C kružnica $|z|=2$. $\left[\frac{2\pi i}{4}(-1+1-1+1)=0\right]$.

12. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z\,dz}{z(z-1)^2}$. $[2\pi i(1+0)]$.

13. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z\,dz}{(z-1)(z-3)}$. $[-\pi i]$.

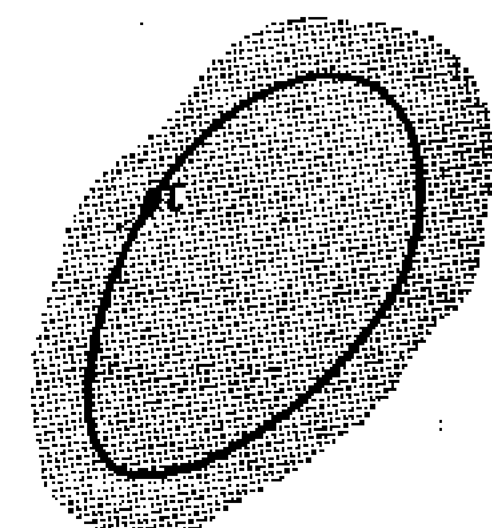
14. $\oint\limits_{|z-3i|=4} \frac{dz}{e^z-1}$. $[2\pi i\{\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=2\pi i} f(z)\}=2\pi i(1+1)=4\pi i]$.

§ 16. REZIDUUM FUNKCIJE $f(z)$ S OBZIROM NA BESKONAČNO DALEKU TOČKU

Promatrajući rezidue funkcije $f(z)$ u singularnim točkama $z=a$ te funkcije, pretpostavljali smo do sada da su točke $z=a$ u konačnosti. Međutim pojam reziduuma možemo proširiti i na beskonačno daleku točku u tako zvanoj *proširenoj ravnini Z*.

Pretpostavimo da je beskonačno daleka točka singularna točka funkcije $f(z)$, a s C označimo po volji uzetu u konačnosti zatvorenu krivulju, obično se za C uzima kružnica dovoljno velikog polumjera. Vidi sl. 54.

Integriranje po krivulji C vrši se sada u smislu kretanja kazaljke na satu, tj. u negativnom smislu, da beskonačno udaljena točka uvijek ostane s lijeve strane.



Slika 54.

Može se pokazati da u okolišu beskonačno udaljene točke Laurentov red

$$f(z)=c_0+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\cdots+c_1z+c_2z^2+\cdots$$

konvergira uniformno po krivulji C pa ga možemo integrirati uzduž krivulje C, pri čemu će se svi članovi osim drugoga poništiti, pa ćemo dobiti

$$\oint\limits_C f(z)\,dz=c_{-1}\oint\limits_C\frac{dt}{t}=c_{-1}(-2\pi i)=-c_1\cdot2\pi i,$$

a odatle je

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C f(z)\,dz. \tag{41}$$

To znači: Reziduum funkcije $f(z)$ s obzirom na beskonačno daleku točku jednak je koeficijentu člana $\frac{1}{z}$ u razvoju funkcije $f(z)$ u Laurentov red u okolišu točke $z = \infty$ uzetom s protivnim predznakom, tj. $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$.

Iz navedenog slijedi: Ako je funkcija $f(z)$ analitička u proširenoj ravnini Z, osim u konačnom broju singularnih točaka, zbroj svih rezidua, u koji je uključen i reziduum u točki $z = \infty$, jednak je nuli.

Kako je $\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz$ zbroj svih rezidua s obzirom na sve singularne točke funkcije $f(z)$, koje leže unutar konture C, tada $\frac{1}{2\pi i}\oint_C$ predočuje reziduum iste funkcije s obzirom na beskonačno udaljenu točku, pa će zbroj sviju rezidua biti:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz = 0 \tag{42}$$

ili

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(a_k) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

Primjeri

Odredi rezidue u svim singularnim točkama proširene ravnine Z, dakle i u točki $z = \infty$, zadanih analitičkih funkcija:

1. $f(z) = \dfrac{2}{z - i}$.

Funkcija je analitička u svim točkama proširene ravnine Z osim pola I reda $z = i$.

U primjeru 1. predašnjeg paragrafa izračunali smo $\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = 2$. Prema formuli (42) imamo

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0,$$

a odatle je

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = -2.$$

2. $f(z) = \dfrac{z^5}{z^2 - 1}$.

Funkcija $f(z)$ ima u proširenoj ravnini Z tri singularne točke: dva pola I reda $z_1 = 1$ i $z_2 = -1$ i pol III reda $z_3 = \infty$, $\left[\text{jer je } \dfrac{z^5}{z^2-1} = z^3\left(\dfrac{1}{1 - \frac{1}{z^2}}\right)\right]$.

U zadatku 10. odredili smo da je

$$\operatorname{Res}_{z_1=1} f(z) = \operatorname{Res}_{z_2=-1} f(z) = \frac{1}{2}.$$

Prema (42) imamo:

$$\operatorname{Res}_{z_1=1} f(z) + \operatorname{Res}_{z_2=-1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0,$$

pa je

$$1 + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0 \quad \text{i} \quad \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \underline{-1}.$$

Do istog rezultata dolazimo, ako zadanu funkciju razvijemo u Laurentov red, izvan kružnice $|z| = 1$.

$$\frac{z^5}{z^2-1} = z^3\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = z^3\left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} + \cdots\right) = z^3 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \cdots,$$

pa je prema (41)

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = \underline{-1}.$$

3. $f(z) = \dfrac{z^6}{(z-1)^4}$.

Funkcija $f(z)$ je analitička na proširenoj ravnini Z i to svuda osim pola IV reda $z_1 = 1$ i pola II reda $z_2 = \infty$. U gore navedenim primjeru 5. odredili smo:

$$\operatorname{Res}_{z_1=1} f(z) = 20,$$

pa prema (42) imamo neposredno

$$20 + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0, \quad \text{pa je} \quad \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \underline{-20}.$$

Odredi još jednom taj rezultat tako da $f(z)$ razviješ u Laurentov red u okolišu točke $z = \infty$.

4. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

Na početku predašnjeg paragrafa pokazali smo da je ta funkcija analitička osim u bitno singularnoj točki $z = 0$ i da razvoj te funkcije u Laurentov red glasi

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!\,z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \cdots.$$

Taj red konvergira za sve po volji velike $|z|$, pa će konvergirati kako u okolišu točke $z = 0$, tako i u okolišu točke $z = \infty$. Kako je

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{1!} = 1, \quad \text{bit će} \quad \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \underline{-1},$$

jer zbroj rezidua mora biti nula.

5. $f(z) = \dfrac{z}{z^4 - 1}$. $\quad [\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$, vidi primjer 11.].

6. $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - z^5}$. $\quad \left[\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = -\dfrac{1}{2},\ \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 1;\ \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0\right]$.

7. $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$. $\quad \left[\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = -\dfrac{i}{4},\ \operatorname{Res}_{z=-i} f(z) = \dfrac{i}{4};\ \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0\right]$.

8. $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$. $\quad [\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = 2\sin 2,\ \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -2\sin 2]$.

§ 17. IZRAČUNAVANJE ODREĐENIH REALNIH INTEGRALA POMOĆU REZIDUA

Neke određene integrale funkcija realne promjenljive možemo riješiti tako da ih transformiramo u integrale po zatvorenoj konturi funkcije kompleksne promjenljive, pa zatim primjenjujemo pri računanju tih integrala osnovni teorem (38)″ o reziduumu:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z).$$

Navedimo primjere:

1. $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos x}$, gdje je a realan broj veći od 1.

Stavimo $e^{ix} = z$.

Mijenjamo li x od 0 do 2π, točka z će opisati u pozitivnom smislu kružnicu C $|z| = 1$.

Da izrazimo $\cos x$ sa z, uzmimo ga u obliku $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ i uvrstimo $e^{ix} = z$. Dobivamo

$$\cos x = \frac{z+z^{-1}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z},$$

dok je $dz = d(e^{ix}) = e^{ix}\,i\,dx = i\,z\,dx$, a odatle je $dx = \frac{dz}{iz}$.

Uvrštenje u integral daje

$$\oint_C \frac{dz}{iz\left(\frac{z^2+1}{2z}+a\right)} = \frac{2}{i}\oint_C \frac{dz}{z^2+2az+1}.$$

Iz $z^2+2az+1 = 0$ računamo polove integranda:

$$z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2-1}.$$

Kako je $a > 1$, opaženo da samo pol z_1 leži unutar kružnice C. Za taj pol I reda računamo prema formuli (39) uzevši u obzir da je $g = 1$ i $h' = 2z+2a$:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{1}{-2a+2\sqrt{a^2-1}+2a} = \frac{2}{2\sqrt{a^2-1}},$$

pa zadani integral ima vrijednost

$$I = 2\pi i \cdot \frac{2}{i} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Na sličmi način riješi

2. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)^2}$. $\left[\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right]$.

Teoriju rezidua možemo također primijeniti za rješavanje nekih tipova nepravih integrala realne promjenljive.

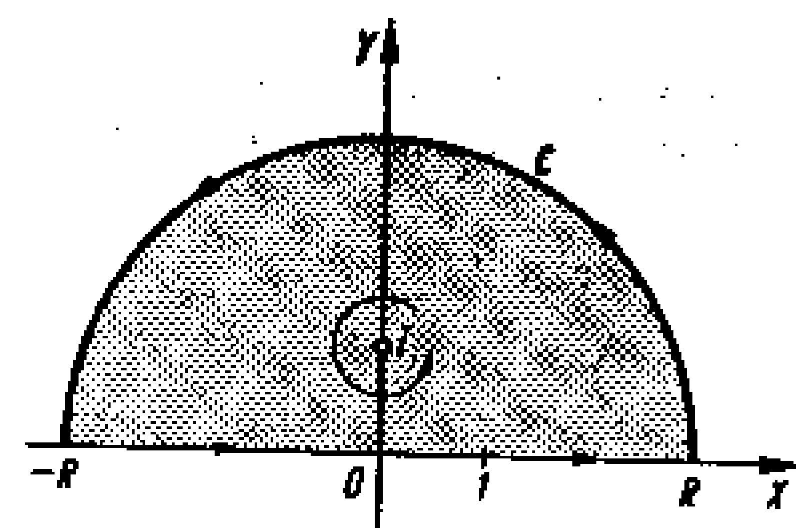
Navedimo primjer.

Riješi $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$.

Pretpostavimo da je x realni dio kompleksnog broja z pa promotrimo konturni integral

$$\oint_C \frac{dz}{1+z^2},$$

pri čemu uzmimo za zatvorenu konturu C polukružnicu polumjera R sa središtem u ishodištu O i dio realne osi X od $-R$ do $+R$. Vidi sl. 55.



Slika 55.

Ta kontura sadrži samo jednu singularnu točku integranda i to $z_1 = i$.

Integrirajući uzduž te konture, dobit ćemo uzevši u obzir da je uzduž realne osi X $z = x$, a uzduž polukružnice $z = R\,e^{i\varphi}$, pa je $dz = dx$, odnosno $dz = R\,e^{i\varphi}\,i\,d\varphi$:

$$\oint_C \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + i\int_0^\pi \frac{R\,e^{i\varphi}\,d\varphi}{1+R^2 e^{2i\varphi}} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + i\int_0^\pi \frac{d\varphi}{R^{-1}e^{-i\varphi}+R\,e^{i\varphi}}.$$

Opažamo, da kad $R \to \infty$, $R^{-1}e^{-i\varphi} \to 0$ i $\frac{i}{R\,e^{i\varphi}} \to 0$, pa i

$$\oint_C \frac{dz}{1+z^2} \to \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2}. \qquad \text{(a)}$$

$\oint_C \frac{dz}{1+z^2}$ znamo riješiti.

Na slici 55 vidimo, da samo pol $z_1 = i$ integranda leži unutar konture C, pa prema formuli (39) dobivamo:

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{2i},$$

pa je

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$$

ili prema (a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Kako integrand $\frac{1}{1+x^2}$ prima samo pozitivne vrijednosti, a simetričan je s obzirom na os Y (paran):

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \underline{\frac{\pi}{2}}.$$

Navedenom primjeru možemo dati općenitije značenje, ukoliko integrand nepravog integrala ima svojstva navedena u tom primjeru. To znači:

Teorem I.

Ako je funkcija $f(z)$ analitička po čitavoj gornjoj poluravnini Z računajući i realnu os, osim konačnog broja singularnih točaka $a_1, a_2, \ldots, a_k$, koje leže iznad realne osi, dok je broj »nula« višestruki korijen jednadžbe $f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ i to višestrukosti $m \geq 2$, odnosno kad je točka $z = \infty$ nultočka funkcije $f(z)$ i to reda $m \geq 2$, onda vrijedi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=0}^{k} \operatorname{Res}_{z=a_k} f(z). \qquad \textbf{(43)}$$

Primjeri

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$.

Integrand $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3}$ odgovara svim uvjetima teorema I:

$$\text{jednadžba } f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^3} = \frac{z^6}{(z^2+1)^3}$$

ima šesterostruki korijen $z = 0$, nazivnik $f(z)$ i to $(1+z^2)^3$ ima dva trostruka korijena $z_1 = i$ i $z^2 = -i$, pri čemu u gornjoj poluravnini funkcija $\frac{1}{(1+z^2)^3}$ ima samo pol III reda $z_1 = i$, inače je analitička kao i na realnoj osi.

Integral možemo izračunati neposredno prema formuli (43), dok $\operatorname{Res}_{z_1=i} \frac{1}{(1+z^2)^3}$ računamo prema (40) uzevši u obzir da je

$$m - 1 = 3 - 1 = 2,$$

pa je

$$\operatorname{Res} \frac{1}{(1+z^2)^3} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{(z-1)^3}{(1+z^2)^3}\right]_{z_1=1}.$$

Računajući $\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z-i}{1+z^2}\right)^3 = \frac{d^2}{dz^2}(z+1)^{-3} = 12(z+i)^{-5}$, dobivamo

$$\operatorname{Res}_{z_1=i} \frac{1}{(1+z^2)^3} = 6\left|z+i\right|_{z_1=i}^{-5} = \frac{6}{(2i)^5} = -\frac{3}{16}i,$$

pa prema (43) imamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{3}{16}i\right) = \underline{\frac{3}{8}\pi}.$$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2+1)^2}\,dx$.

Funkcija $f(z) = \frac{z-1}{(z^2+1)^2}$ odgovara uvjetima teorema I, jer jednadžba $f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{(1-z)z^3}{(1+z^2)^2}$ ima četverostruki korijen $z = 0$, a točke $z_1 = i$ i $z_2 = -i$ su polovi II reda, pri čemu u gornjoj poluravnini leži pol $z_1 = i$ funkcije $f(z)$. Računamo prema (40):

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{d[(z-i)^2 \cdot f(z)]}{dz} = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz} \frac{z-1}{(z+1)^2} = \lim_{z\to i} \frac{2+i-z}{(z+1)^3} = \frac{2}{(2i)^3} = \frac{1}{-4i} = \frac{i}{4}.$$

pa prema (43) imamo:

$$I = 2\pi i \cdot \frac{i}{4} = \underline{-\frac{\pi}{2}}.$$

3. Riješi prema formuli (43) malo prije riješeni integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, koji odgovara uvjetima teorema I.

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$. $\qquad \left[-\frac{\pi}{27}\right]$.

Nepravi integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ kadšto možemo izračunati i u tom slučaju, kad točka $z = \infty$ nije nula reda, koji nije niži od drugoga za $f(z)$. Tada dolazi u obzir:

Teorem II.

Ako funkcija $f(z)$ zadovoljava tri uvjeta:

1) možemo je prikazati u obliku produkta $f(z) = e^{iaz} g(z)$, gdje je $a > 0$ i $g(z) \to 0$ kad $z \to \infty$ i uz uvjet, da je $I z \geq 0$, tj. $z \to \infty$ i to samo na gornjoj poluravnini Z ili na realnoj osi,

2) $f(z)$ je analitička na realnoj osi,

3) $f(z)$ je analitička u gornjoj poluravnini osim u konačnom broju singularnih točaka $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Uz te pretpostavke vrijedi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{k} \operatorname{Res}_{z=a_k} f(z). \qquad \textbf{(44)}$$

Primjeri

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4}\,dx.$

Promotrimo funkciju $f(z)=\dfrac{z\cdot e^{iz}}{z^2+4}$, koja zadovoljava sve uvjete teorema II $\left[a=1,\ g(z)=\dfrac{z}{z^2+4}\right]$. Funkcija $f(z)$ ima dva pola I reda $z_1=2i$ i $z_2=-2i$, pri čemu u gornjoj poluravnini leži pol z_1.

Računamo prema (39):

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = \left|\frac{z\, e^{iz}}{2z}\right|_{z=2i} = \frac{2i\cdot e^{-2}}{4i}=\frac{1}{2e^2}.$$

Primijenimo li Eulerovu formulu $e^{ix}=\cos x + i\sin x$ i uzmemo li u obzir zaključak teorema II, tj. formulu (44), možemo zadani nepravi integral napisati u obliku:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2+4}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2+4}\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4}\,dx = 2\pi i\cdot\frac{1}{2e^2}.$$

Izjednačenje realnih i imaginarnih dijelova u posljednjoj jednakosti daje

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+4}\,dx=0 \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4}\,dx = 2\pi\cdot\frac{1}{2e^2}=\frac{\pi}{e^2}.$$

Primijetimo da je prvi rezultat očigledan, jer je integrand neparna funkcija.

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4x+20}\,dx.$ $\left[\dfrac{\pi}{2e^4}(2\cos 2+\sin 2)\right]$.

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,dx.$ $\left[\dfrac{\pi}{3e^3}(\cos 1 - 3\sin 1)\right]$.

U gore navedenim teoremima I i II pretpostavlja se da funkcija $f(z)$ nema singularnih točaka na realnoj osi. U slučaju da taj uvjet nije ispunjen integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ ne bi morao postojati. Međutim, ako $f(z)$ ima na realnoj osi konačni broj polova prvoga reda, tada se kaže da integral postoji *u smislu glavne vrijednosti*.

Za izračunavanje integrala vrijedi u tom slučaju:

Teorem III.

Ako funkcija $f(z)$ zadovoljava uvjete označene u teoremu II s 1) i 3), a na realnoj osi ima konačni broj polova I reda $x_1, x_2, \ldots, x_m$, tada

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\left\{\sum_{k=1}^{k}\operatorname*{Res}_{x=a_k} f(x) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{Res}_{x=x_k} f(x)\right\}. \qquad (45)$$

Primjer

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx.$$

Funkcija $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z(z^2+1)}=\dfrac{e^{iz}}{z(z-i)(z+i)}$ odgovara svim uvjetima teorema III. U gornjoj poluravnini ima pol I reda $z_1=i$, a na realnoj osi — pol I reda $z_2=0$.

Rezidue računamo prema formuli (39):

$$\operatorname*{Res}_{z_1=i} f(z) = \left|\frac{e^{iz}}{3z^2+1}\right|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{-3+1} = -\frac{1}{2e}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z_2=0} f(z) = \frac{e^0}{1}=1.$$

Uzmemo li u obzir da je $e^{ix}=\cos x + i\sin x$, imat ćemo prema formuli (45):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x(x^2+1)}\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx = 2\pi i\left(-\frac{1}{2e}+\frac{1}{2}\right) = \pi i\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

Odatle slijedi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx = \pi\left(1-\frac{1}{e}\right),$$

kako je integrand parna funkcija:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx = 2\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx = \pi\left(1-\frac{1}{e}\right),$$

bit će

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

Izračunaj integrale:

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$ $[\pi]$.

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-5x+6}\,dx.$ $[\pi(2\sin 2 - 3\sin 3)]$.

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{(x^2+4)(x-1)}.$ $\left[\dfrac{\pi}{5}(\cos 1 - e^{-2})\right]$.

II.

MATRICE I MATRIČNI RAČUN

§ 1. POJAM. VRSTE MATRICA

Znamo riješiti sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

pomoću determinante*)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

koja nakon razvijanja daje vrijednost nazivnika u svim izrazima za tražene nepoznanice x_1, x_2 i x_3, dok zamjena prvog, drugog i trećeg stupca u determinanti D slobodnim članovima b_1, b_2 i b_3 jednadžbe daje nakon razvijanja tako dobivenih determinanata vrijednosti brojnikâ nepoznanica.

Sada ćemo promatrati kvadratnu tablicu brojeva

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad \text{(a)}$$

koja se zove *matrica* **A**, a također i općenite *pravokutne* matrice kojima je broj redaka različit od broja stupaca, na primjer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},$$

i matrice od jednog stupca

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

koje se nazivaju *vektorima*, a njihovi elementi — *komponentama*.

---

*) Vidi od istog pisca Repetitorij više matematike, dio III § 1. Izdavač »Tehnička knjiga«. Zagreb.

Općenito se matrice prikazuju u uglatim ili okruglim zagradama, a kadšto su omeđene dvostrukim paralelnim pravcima:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = [a_{ij}],$$

gdje su $i = 1, 2, \dots, m$ redni brojevi redaka matrice,
$j = 1, 2, \dots, n$ redni brojevi stupaca matrice.

Matrica koja ima m redaka i n stupaca zove se matrica tipa $m \times n$ ili kraće (m, n)-matrica. Ako je broj redaka matrice jednak broju stupaca, tj. ako je $m = n$ imamo *kvadratnu* matricu reda n ili kraće (n) matricu. Na primjer, gore navedena matrica (a) je kvadratna reda 3.

Kod kvadratnih matrica razlikujemo *dijagonalne matrice* u kojem su svi elementi različitih indeksa $(i \neq j)$ jednaki nuli:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Kaže se da elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ leže na *glavnoj dijagonali* matrice.

Dijagonalne matrice kojima su svi elementi na glavnoj dijagonali međusobno jednaki $(a_{11} = a_{22} = a_{33} = \dots = a_{nn})$, zovu se *skalarne matrice*, napose, ako je $a = 1$ skalarna se matrica naziva *jediničnom* i označuje se slovom $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}.$$

U daljnjem susrest ćemo matrice oblika

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

To su *donja i gornja trokutna matrica.*

Determinanta trokutne matrice jednaka je umnošku njenih elemenata koji se nalaze na glavnoj dijagonali. Do tog rezultata dolazimo odmah, čim izračunamo vrijednost determinante!

Matrice koje se sastoje od jednog stupca

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

ili od jednog retka

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

zovu se *matrica-stupac* i *matrica-redak*. Rekli smo već da te matrice zovemo *vektorima*, a njihove elemente *komponentama.*

Podvucimo još jednom razliku između matrice i determinante: matrica je *tablica brojeva*, dok je determinanta *broj* prikazan u obliku tablice.

Primijetimo:

a) Determinanta dijagonalne matrice jednaka je umnošku njenih elemenata na dijagonali:

$$\det \mathbf{A} = A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \dots a_{nn},$$

pa je determinanta jedinične matrice $\mathbf{E}$ jednaka 1:

$$\det \mathbf{E} = E = 1.$$

b) Determinanta matrice, koja se sastoji od jednog broja, jednaka je tom broju — treba razlikovati matricu $[a]$ od broja a!

c) Matrica kojoj su svi elementi jednaki nuli zove se *nulta matrica* i označuje se s **0**.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

d) Dvije matrice **A** i **B** su jednake, tj. **A** = **B**, ako imaju iste elemente u istom položaju, tj. imaju isti broj redaka i isti broj stupaca s identičnim elementima.

Npr.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/3 & 6-4 \\ 1/3 \cdot 12 & 2+4 \\ (7)\cdot(1) & 9/1 \end{bmatrix}.$$

§ 2. OPERACIJE SA MATRICAMA

1. Zbrajanje

Dvije matrice **A** i **B** možemo zbrojiti, ako imaju isti broj redaka i isti broj stupaca. U tom slučaju matrica zbroja **C** = **A** + **B** izračuna se tako da se posebno zbroje pripadni elementi tih matrica.

Npr.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & 13 \end{bmatrix}.$$

Pravilo zbrajanja dviju matrica vrijedi za bilo koji konačni broj pribrojnika.

Npr.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Za zbrajanje matrica vrijede zakoni komutacije i asocijacije:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A},$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}.$$

2. Oduzimanje

Diferencija dviju matrica **A** i **B** istog tipa ($m \times n$), odnosno (n) određuje se tako, da se oduzimaju elementi suptrahenda od odgovarajućih elemenata minuenda.

Npr. odredimo razliku matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \\ 9 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5-2 & 1-0 & 3-1 \\ 7-3 & 0-5 & 1-2 \\ 9-5 & 6-6 & 8-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Produkt matrice A i broja (skalara) α

Produkt **A** α daje matricu **C**, kojoj su elementi umnošci elemenata matrice **A** i skalara α.

Primjer.

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 5 & 2\cdot 5 \\ 4\cdot 5 & 6\cdot 5 \\ 7\cdot 5 & 9\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 20 & 30 \\ 35 & 45 \end{bmatrix}.$$

Navedimo još nekoliko svojstava linearnih operacija (**A** i **B** su matrice, α i β skalari):

$$(\alpha + \beta)\,\mathbf{A} = \alpha\,\mathbf{A} + \beta\,\mathbf{A}.$$

$$\alpha\,[\mathbf{A} + \mathbf{B}] = \alpha\,\mathbf{A} + \alpha\,\mathbf{B}.$$

$$\alpha\,[\beta\,\mathbf{A}] = \alpha\,\beta\,\mathbf{A}.$$

4. Množenje matrice s matricom

Produkt **A B** matrica **A** i **B** definira se samo za taj slučaj, kad je broj *stupaca* matrice **A** jednak broju *redaka* matrice **B**, pa je u produktu **A B** broj redaka uvijek jednak broju redaka u prvom faktoru **A**, dok je broj stupaca jednak broju stupaca u drugom faktoru **B**. Drugim riječima, produkt (m, n) matrice i matrice (n, q) daje matricu (m, q). Vidi na slici 1 sheme 1, 2 i 3.

Ako je matrica **A** matrica-redak

$$\mathbf{a} = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_n)$$

a matrica **B** matrica-stupac

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

tada je

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\,\mathbf{B} = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n]$$

npr.

$$(1\ \ 2\ \ 3) \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = [1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5] = \underline{[25]}.$$

Rezultat je matrica, a ne broj!

1) 2) 3)

Slika 1.

Jednoelementna matrica $[a]$ može se množiti zdesna s jednim vektorom:

$$[a]\,[b_1\ b_2\ \dots\ b_n] = [ab_1\ ab_2\ \dots\ ab_n]$$

ili slijeva sa vektorom-stupcem

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} [a] = \begin{bmatrix} b_1 a \\ \vdots \\ b_n a \end{bmatrix},$$

dok se broj a može množiti sa svakom matricom, pa je

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} (a_1\ a_2\ a_3) = \begin{bmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & b_1a_3 \\ b_2a_1 & b_2a_2 & b_2a_3 \\ b_3a_1 & b_3a_2 & b_3a_3 \end{bmatrix}.$$

U općem slučaju postupamo kako slijedi:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} =$$ (vidimo da je broj stupaca (3) matrice **A** jednak broju redaka (3) matrice **B** pa množenje možemo izvesti) =

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}.$$

Postupak je jasan: sve elemente prvog *retka* imatrice **A** množimo s pripadnim elementima prvog *stupca* matrice **B** pa te umnoške zbrajamo i tako dobivamo prvi član produkta. Postupajući na isti način s istim prvim retkom matrice **A** i *drugim stupcem* matrice **B** dobivamo drugi član prvog retka traženog produkta. Na isti način postupamo s elementima *drugog retka* matrice **A** i obim stupcima matrice **B** pa dobivamo prvi i drugi član drugog retka produkta **A B**.

Vidimo da produkt **A B** ima toliko *redaka* (2), koliko ih ima *prvi* faktor **A** i toliko *stupaca* (2) koliko ih ima *drugi* faktor **B**.

Primijetimo još da je determinanta produkta dviju matrica jednaka produktu determinanata faktora.

Primjeri.

1. $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot3+1\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot3+0\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}}.$$

2. $$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot (1\ \ 2\ \ 3) = \begin{bmatrix} 2\cdot1 & 2\cdot2 & 2\cdot3 \\ 1\cdot1 & 1\cdot2 & 1\cdot3 \\ 3\cdot1 & 3\cdot2 & 3\cdot3 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}},$$

dok je

$$(1\ \ 2\ \ 3) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = [1\cdot2 + 2\cdot1 + 3\cdot3] = \underline{[13]}.$$

Produkt dviju matrica općenito nije komutativan, tj. ovisi o poretku članova, pri čemu mogu biti dva slučaja:

1) $\mathbf{B\,A} \neq \mathbf{A\,B}$.

Pokažimo to na pređašnjem primjeru.

$$\mathbf{B\,A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2+1\cdot 3 & 3\cdot 1+1\cdot 0 & 3\cdot 1+1\cdot 1 \\ 2\cdot 2+1\cdot 3 & 2\cdot 1+1\cdot 0 & 2\cdot 1+1\cdot 1 \\ 1\cdot 2+0\cdot 3 & 1\cdot 1+0\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{\begin{bmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

dok smo za $\mathbf{A\,B}$ dobili $\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} \neq \mathbf{B\,A}$.

2) $\mathbf{B\,A}$ ne postoji.

Primjer.

$$\mathbf{A\,B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A\,B} = \begin{bmatrix} 5\cdot 1+0\cdot 2+7\cdot 4 & 5\cdot 2+0\cdot 4+7\cdot 3 & 5\cdot 3+0\cdot 6+7\cdot 0 \\ 4\cdot 1+1\cdot 2+3\cdot 4 & 4\cdot 2+1\cdot 4+3\cdot 3 & 4\cdot 3+1\cdot 6+3\cdot 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 33 & 31 & 15 \\ 18 & 21 & 18 \end{bmatrix}}.$$

$$\mathbf{B\,A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

a taj produkt nije definiran, jer broj stupaca (3) u $\mathbf{B}$ nije jednak broju redaka (2) u $\mathbf{A}$.

Isto tako za $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ imamo $\mathbf{A\,B} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 2 \\ 3\cdot 1+4\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \end{bmatrix}$,

dok produkt $\mathbf{B\,A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ne postoji.

Očito je da za kvadratne matrice možemo uvijek izračunati $\mathbf{A\,B}$ i $\mathbf{B\,A}$, ali samo u iznimnim slučajevima su matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ komutativne, tj. $\mathbf{A\,B} = \mathbf{B\,A}$.

Primjer.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A\,B} = \begin{bmatrix} 1\cdot(-3)+(-2)\cdot 2 & 1\cdot(-2)+(-2)\cdot(-4) \\ 2\cdot(-3)+0\cdot 2 & 2\cdot(-2)+0\cdot(-4) \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}}.$$

$$\mathbf{B\,A} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\cdot 1+(-2)\cdot 2 & -3\cdot(-2)+(-2)\cdot 0 \\ 2\cdot 1+(-4)\cdot 2 & 2\cdot(-2)+(-4)\cdot 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{\begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}}.$$

Lako se da pokazati da su matrice $\mathbf{A}$ i jedinična matrica $\mathbf{E}$ komutativne:

$$\mathbf{A\,E} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Isti rezultat dobivamo za $\mathbf{E\,A}$.

Matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ su *antikomutativne*, ako je

$$\mathbf{A\,B} = -\mathbf{B\,A}.$$

Za produkt matrica vrijede dva zakona *distribucije*:

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}]\,\mathbf{C} = \mathbf{A\,C} + \mathbf{B\,C}$$

$$\mathbf{C}\,[\mathbf{A} + \mathbf{B}] = \mathbf{C\,A} + \mathbf{C\,B}.$$

Primjer.

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}] = \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}}.$$

Pokaži da vrijedi i drugi zakon distribucije.

Primijetimo da produkt dviju matrica može biti nulmatrica, a da nijedan faktor nije nulmatrica.

Npr.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Promijenimo li redoslijed faktora, nećemo dobiti nulmatricu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pokaži da je $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{0}$ za

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Primjeri za vježbu

1. Izračunaj

a) $$(29\ 16\ 49) \begin{bmatrix} -2 & -1 & 6 \\ -13 & 4 & 32 \\ 5 & -1 & -15 \end{bmatrix}. \qquad \{(-21 \quad -14 \quad -49)\}.$$

b) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \{0\}.$$

c) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}. \qquad \left\{\begin{bmatrix} 13 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}.$$

2. Izračunaj $\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ i $\mathbf{B}\,\mathbf{A}$.

a) $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}. \qquad \left\{\begin{bmatrix} 20 & 7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \text{ i } \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \\ 2 & 17 & 16 \end{bmatrix}\right\}.$$

b) $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 11 \end{bmatrix} \qquad \left\{\begin{bmatrix} 18 & 46 \\ 29 & 80 \end{bmatrix} \text{ i } \begin{bmatrix} 13 & 27 \\ 37 & 85 \end{bmatrix}\right\}.$$

3. Izračunaj $\mathbf{A}\,\mathbf{B} - \mathbf{B}\,\mathbf{A}$, ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \left\{\begin{bmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix}\right\}.$$

4. Izračunaj $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3$. $\qquad \left\{\begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{bmatrix}\right\}$.

§ 3. PREDOČIVANJE VEKTORA POMOĆU MATRICA

Neka je u ravnini zadan vektor **u**, kojemu su komponente u_1 i u_2. Taj vektor možemo prikazati u obliku matrice

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Transformacija vektora **u** pomoću operacija, koje su određene matricom **A**, sastoji se u množenju matrica

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

gdje su v_1 i v_2 komponente vektora **v** u koji se transformirao vektor **u**.

Izmnožimo li obje matrice na lijevoj strani gore navedene jednakosti prema poznatim nam pravilima za množenje matrica, dobit ćemo tražene komponente v_1 i v_2 vektora **v**:

$$v_1 = a_{11}u_1 + a_{12}u_2.$$
$$v_2 = a_{21}u_1 + a_{22}u_2.$$

Ako na primjer matrica **A** ima oblik $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$, dok su u_1 i u_2 koordinate točke P s obzirom na koordinatni sustav $U_1\,U_2$, a v_1 i v_2 koordinate točke Q s obzirom na koordinatni sustav $V_1\,V_2$, koji je zaokrenut za kut φ s obzirom na prvi sustav, dobit ćemo prema

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

za v_1 i v_2 vrijednosti:

$$v_1 = \cos\varphi\, u_1 - \sin\varphi\, u_2.$$
$$v_2 = \sin\varphi\, u_2 + \cos\varphi\, u_2.$$

Tako se vrše transformacije u dvodimenzionalnom području.

Kao primjer izračunaj na taj način koordinate točaka Q_1, Q_2 i Q_3 u $Y_1\,Y_2$ ravnine koje odgovaraju točkama P_1, P_2 i P_3 $X_1\,X_2$ ravnine, ako je kut $\varphi = 60°$, dok točke P imaju koordinate $P_1\,(4, 0)$, $P_2\,(-4, 6)$ i $P_3\,(-6, -8)$.

U prostoru, tj. u trodimenzionalnom području, transformacije se vrše pomoću kvadratne matrice reda 3.

Kao primjer navedimo linearnu transformaciju koja točki $P(u_1, u_2, u_3)$ pridružuje točku $Q(v_1, v_2, v_3)$, koje pripadaju trodimenzionalnom području $U_1 U_2 U_3$, odnosno $V_1 V_2 V_3$, ako je

$$\begin{aligned} v_1 &= 2u_1 - 3u_2 + u_3 \\ v_2 &= -u_1 + u_2 - 2u_3 \\ v_3 &= 5u_1 - 2u_2 - 3u_3. \end{aligned}$$

Iz navedenog slijedi:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

Uzmemo li, na primjer, da točka P ima koordinate (1, 1, 1), tj.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

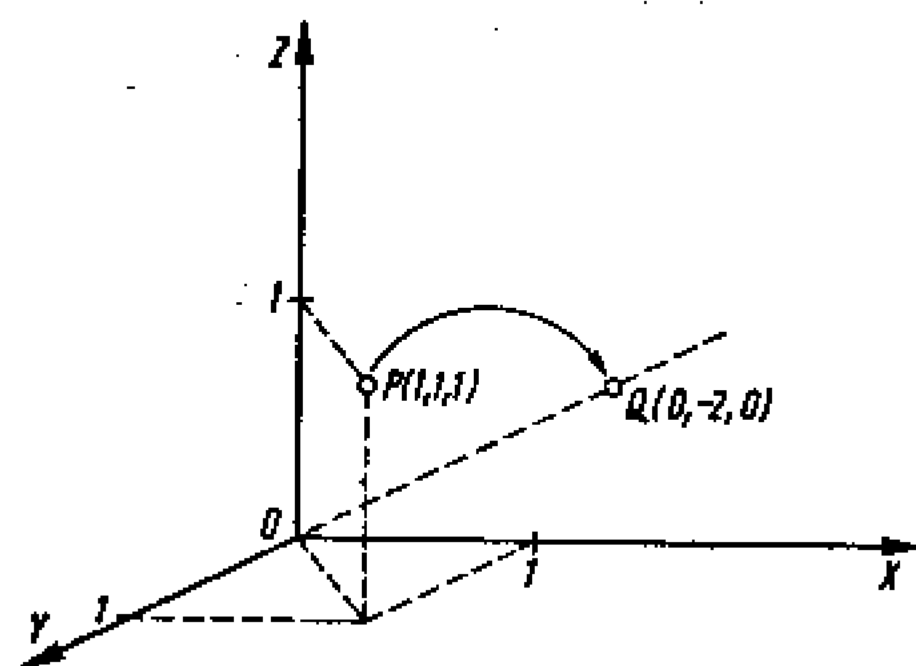
bit će

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

pa je

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Na taj način transformiramo bilo koju točku P u novu točku Q. Vidi sliku 2.



Slika 2.

Analogno se vrše transformacije u n-dimenzionalnom području prelazeći od vektora $\mathbf{u}$ s komponentama $u_1, u_2, \ldots, u_n$ na vektor $\mathbf{v}$ s komponentama $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pomoću kradratne matrice n-og reda.

§ 4. TRANSPONIRANJE MATRICA

Ako matricu **A** preklopimo oko njene glavne dijagonale, njeni će stupci postati recima, a njeni reci stupcima. Ta nova matrica, koja se zove *transponirana matrica* s obzirom na matricu **A**, označuje se s $\widetilde{\mathbf{A}}$. Na taj način $(m\,n)$ matrica **A** pretvara se u $(n\,m)$ matricu $\widetilde{\mathbf{A}}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Primijetimo:

1) Ako nad matricom **A** izvršimo dvaput redom operaciju transponiranja, matrica **A** ostaje nepromijenjena.

2) Transponirana matrica zbroja dviju matrica jednaka je zbroju transponiranih matrica:

$$(\widetilde{\mathbf{A} + \mathbf{B}}) = \widetilde{\mathbf{A}} + \widetilde{\mathbf{B}}.$$

3) Determinanta matrice **A** jednaka je determinanti matrice $\widetilde{\mathbf{A}}$:

$$\det \mathbf{A} = A = \det \widetilde{\mathbf{A}} = \widetilde{A}.$$

4) Transponirana matrica produkta dviju matrica jednaka je produktu transponiranih matrica uzetih u obratnom redoslijedu:

$$(\widetilde{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}) = \widetilde{\mathbf{B}}\,\widetilde{\mathbf{A}}.$$

Primjer.

Za matricu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ transponirana matrica glasi $\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{bmatrix}$, dok je matrica-redak $\mathbf{u} = (2\ 7\ 5\ 8)$ transponirana matrica s obzirom na matricu-stupac $\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$.

§ 5. POSEBNE VRSTE KVADRATNIH MATRICA

1. Simetrične i kososimetrične kvadratne matrice

Kvadratna matrica naziva se *simetričnom*, ako su njeni elementi, koji leže simetrično s obzirom na glavnu dijagonalu, međusobno jednaki.

Matrica je *kososimetrična*, ako su njeni elementi simetrično položeni s obzirom na glavnu dijagonalu, jednaki po veličini i protivni po predznaku.

Očito je da je za simetričnu matricu $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}$, dok je za kososimetričnu $\mathbf{A} = -\tilde{\mathbf{A}}$.

Npr. za matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 3 & 5 & 4 \\ -8 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -1 \\ -7 & 0 & -9 \\ 1 & 9 & 0 \end{bmatrix},$$

kaže se, da je **A** matrica *simetrična*, a **B** *kososimetrična*.

Produkt matrice **A** i transponirane matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ daje simetričnu matricu **C**:

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{C},$$

jer je

$$\tilde{\mathbf{C}} = (\widetilde{\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}}) = (\tilde{\tilde{\mathbf{A}}})\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{C}.$$

Za naš primjer je

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 74 & -14 & -68 \\ -14 & 50 & 24 \\ -68 & 24 & 161 \end{bmatrix}.$$

2. Regularne kvadratne matrice

Kvadratna matrica naziva se *regularnom* ili *nesingularnom*, ako je njena determinanta različita od nule, tj. ako je $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Ako je determinanta matrice **A** jednaka nuli ($\det \mathbf{A} = 0$) matrica **A** zove se *singularnom*.

Na primjer trokutna matrica je singularna, ako je makar jedan njen dijagonalni element jednak nuli.

3. Inverz kvadratne matrice

Kvadratna matrica $\mathbf{A}^{-1}$ naziva se *inverznom* s obzirom na kvadratnu matricu **A**, ako je

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E},$$

gdje je **E** jedinična matrica.

Drugim riječima: pomnožimo li inverznu matricu $\mathbf{A}^{-1}$ s matricom **A** bilo zdesna bilo slijeva, dobit ćemo jediničnu matricu **E**.

Kako vidimo, računski vrlo važna inverzna matrica definirana je slično definiciji recipročne vrijednosti nekog broja: $\frac{1}{a} = a^{-1}$ je recipročna vrijednost broja a, ako je $a^{-1} \cdot a = 1$.

Navedimo nekoliko svojstava inverznih matrica:

a) singularna matrica nema inverzne matrice,

b) inverzna matrica, ako postoji, jednoznačno je određena,

c) determinanta inverzne matrice $\mathbf{A}^{-1}$ recipročna je vrijednost determinante matrice **A**,

d) $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

to znači: inverzna matrica produkta dviju ili više regularnih matrica jednaka je produktu inverznih matrica pojedinih faktora uzetih **u** obrnutom redoslijedu.

Postupak za računanje inverznih matrica:

1. korak. Računamo za zadanu matricu **A** vrijednost determinante, tj.

$$\Delta = \det \mathbf{A} = A.$$

2. korak. Zadanu matricu **A** transponiramo da dobijemo matricu $\tilde{\mathbf{A}}$.

3. korak. Za svaki element matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ računamo, idući redak po redak, pripadne *kofaktore* ili *algebarske dopune* (komplemente), tj. subdeterminante, koje dobivamo precrtajući stupac i redak u kojem leži dotični element pri čemu uzimamo: za kofaktore predznake plus i minus naizmjence bez obzira na predznak elementa za koji računamo kofaktor.

4. korak. U matrici **A** zamjenjujemo svaki element pripadnim kofaktorom.

5. korak. Podijelimo li svaki član tako dobivene matrice s $\Delta = \det \mathbf{A}$, dobit ćemo traženu matricu $\mathbf{A}^{-1}$ inverznu s obzirom na zadanu matricu **A**.

6. korak. Načinimo pokus: mora biti

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E} = \text{jedinična matrica} = \mathbf{1}.$$

Primjeri.

Zadana je kvadratna matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Odredi inverznu matricu $\mathbf{A}^{-1}$.

1. Računamo $\Delta = \det \mathbf{A} = A$:

$$\Delta = 1\,(45 - 48) - 2\,(36 - 12) + 3\,(32 - 10) = -3 - 48 + 16 = 15 \neq 0.$$

Zadana matrica $\mathbf{A}$ je regularna pa ima inverznu matricu $\mathbf{A}^{-1}$.

2. Transponiramo matricu $\mathbf{A}$:

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

3 Računamo kofaktore za matricu $\widetilde{\mathbf{A}}$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = +(45 - 48) = -3;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -(18-24) = 6; \quad A_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = +(12 - 15) = -3;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = -24; \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 22; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

4. Dobivamo

$$\begin{bmatrix} -3 & +6 & -3 \\ -24 & +3 & +6 \\ +22 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

5. Svaki element dijelimo s $\Delta = \det \mathbf{A} = A = 15$. Dobivamo:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -8/5 & 1/5 & 2/5 \\ 22/5 & -4/5 & -1/5 \end{bmatrix}.$$

6. Načinimo pokus:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -8/5 & 1/5 & 2/5 \\ 22/5 & -4/5 & -1/5 \end{bmatrix} =$$

$$= \text{(nakon izvršenog množenja matrica)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E} = \mathbf{1}.$$

Za regularnu kvadratnu matricu, koja se sastoji od dva retka i dva stupca $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ određivanje pripadne inverzne matrice mnogo je jednostavnije: treba samo zamijeniti položaj elemenata a_{11} i a_{22} i promijeniti predznake kod ostalih elemenata a_{21} i a_{12}, a zatim podijeliti sve elemente matrice s vrijednošću Δ njene determinante

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Primjer.

Zadano

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$\Delta = -14 + 12 = -2$$

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ -2 & -7/2 \end{bmatrix}.$$

Može se pokazati da je

$$[\mathbf{A}\,\mathbf{B}]^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}^{-1}$$

tj. inverzna matrica produkta dviju matrica jednaka je produktu inverznih matrica pojedinih faktora uzetih u obratnom redoslijedu.

Primjer.

Zadane su matrice: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

$$[\mathbf{A}\,\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 4 + 1\cdot 2 & 3\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 2\cdot 4 + 1\cdot 2 & 2\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 10 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\det[\mathbf{A}\,\mathbf{B}] = 56 - 50 = 6$$

$$[\mathbf{A}\,\mathbf{B}]^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -10 & 14 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 4\end{bmatrix};\qquad \mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix}=\underline{\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4 & -5\\ -10 & 14\end{bmatrix}}.$$

Taj stavak vrijedi za više faktora, npr.

$$[\mathbf{A\,B\,C\,D}]^{-1}=\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}^{-1}.$$

Pokaži to na primjeru: $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}5 & -4\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ i $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}3 & -12\\ -1 & -5\end{bmatrix}$.

Pokaži također da su matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}^{-1}$ komutativne, tj. $\mathbf{A\,A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A}$, ako je na primjer

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 3 & 7 & -3\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}\quad \text{i}\quad \mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -3 & 11\\ 0 & 1 & -3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}.$$

Ako je matrica dijagonalna, inverzna je matrica također dijagonalna. Njeni elementi, različiti od nule, jesu recipročne vrijednosti dijagonalnih elemenata zadane matrice:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & 0 & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & 0\\ 0 & 0 & 0 & d\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1/a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/b & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/c & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/d\end{bmatrix}.$$

Primjeri za vježbu

Odredi uz pokuse matrice inverzne s obzirom na zadane.

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & 8 & 7\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$. $\left\{\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1/5 & -4/5 & 1/4\\ 0 & 1/2 & -3/8\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$.

b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}7 & -8\\ -3 & 2\end{bmatrix}$. $\left\{\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-1/5 & -4/5\\ -3/10 & -7/10\end{bmatrix}\right\}$.

c) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & 3 & 3\\ 7 & 4 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}$. $\left\{\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}14 & -6 & -9\\ -25 & 11 & 16\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix}\right\}$.

d) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$. $\left\{\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 0 & 0\\ 31 & -19 & 3 & -4\\ -23 & 14 & -2 & 3\end{bmatrix}\right\}$.

e) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 1 & 7\end{bmatrix}$. $\left\{\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}22/3 & -3 & -7/3 & 3\\ 55/9 & -2 & -19/9 & 7/3\\ -14/3 & 2 & 5/3 & -2\\ -3 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\right\}$.

f) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & a\end{bmatrix}$. $\left\{\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{a^2}\,\mathbf{A}\ \text{(vrijedi općenito)}\right\}$.

§ 6. RECIPROČNA MATRICA I TRANSPONIRANA RECIPROČNA MATRICA

Uvedimo još dva pojma:

a. **Recipročna matrica** $\mathbf{A}^*$ kvadratne matrice $\mathbf{A}=[a_{ik}]$ je matrica kofaktora A_{ik} elemenata a_{ik} zadane matrice, tj.

$$\mathbf{A}^*=[A_{ik}].$$

b. **Transponirana recipročna matrica** $\widetilde{\mathbf{A}}^*$, koja se također zove *adjungirana*, a dobiva se preklapanjem recipročne matrice oko glavne dijagonale, pa je

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{\widehat{\mathbf{A}}^*}{\det\mathbf{A}},$$

tj. inverzna matrica kvadratne regularne matrice **A** jednaka je transponiranoj recipročnoj matrici $\mathbf{A}^*$ podijeljenoj s determinantom matrice **A**.

Primjer.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 5\\ 2 & -3 & -5\\ 3 & -2 & 6\end{bmatrix}.$$

Računamo recipročnu matricu $\mathbf{A}^*$:

$A_{11}=+(-18-10)=-28;\quad A_{12}=-(\ 12+15)=-27;\quad A_{13}=+(-4+9)=5;$

$A_{21}=-(-6+10)=-4;\quad A_{22}=+(\ 6-15)=-9;\quad A_{23}=-(-2+3)=-1;$

$A_{31}=+(\ 5+15)=20;\quad A_{32}=-(-5-10)=15;\quad A_{33}=+(-3+2)=-1.$

$$\mathbf{A}^*=\begin{bmatrix}-28 & -27 & 5\\ -4 & -9 & -1\\ 20 & 15 & -1\end{bmatrix}.$$

Transponirana recipročna matrica

$$\tilde{\mathbf{A}}^* = \begin{bmatrix} -28 & -4 & 20 \\ -27 & -9 & 15 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot (-28) - 1 \cdot (-27) + 5 \cdot 5 = 24.$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{24} \tilde{\mathbf{A}}^* = \begin{bmatrix} -7/6 & -1/6 & 5/6 \\ -9/8 & -3/8 & 5/8 \\ 5/24 & -1/24 & -1/24 \end{bmatrix}.$$

Na isti način izračunaj $\mathbf{A}^{-1}$ za matricu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\left\{ \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3/2 & -1/2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 5/2 & -3/2 \end{bmatrix} \right\}.$$

§ 7. RANG MATRICE

Subdeterminantom reda k (m, n) matrice $\mathbf{A}\,(k < m, k < n)$ naziva se determinanta D, koja se sastoji uz sačuvani poredak elemenata od k^2 elemenata, koji leže u sjecištu nekih k redaka i k stupaca. Vidi shemu na slici 3.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}.$$

Subdeterminanta 3. reda.

Slika 3.

Rangom matrice $\mathbf{A}$ naziva se *najveći red* što ga mogu imati subdeterminante matrice koje nisu jednake nuli.

Kako subdeterminante imaju kvadratni oblik, očito da je *najveći red* l subdeterminante uvijek jednak manjem od brojeva m i n, a za kvadratnu matricu $(m = n)$ jednak n.

Ako je bar jedna od tih subdeterminanata različita od nule, matrica $\mathbf{A}$ ima rang l. Poništavaju li se sve te subdeterminante reda l, treba promatrati subdeterminante reda $(l - 1)$ itd.

Praktički se postupa obratno: prelazi se od subdeterminanata nižeg reda na subdeterminante viših redova i to uz pripomoć pravila: ako pronađena subdeterminanta koja je različita od nule ima red k, prelazi se na računanje subdeterminanata reda $(k + 1)$, a te određujemo tako da obrubljujemo susjednim elementima matrice tu subdeterminantu D_k zdesna i slijeva odozdo, a zatim zdesna i slijeva odozgo (vidi shemu), pa računamo tako dobivene subdeterminante reda $(k + 1)$. Ako su sve te subdeterminante jednake nuli, matrica ima rang k.

$$\left| D_k \right|, \quad \left| D_k \right|, \quad \left| D_k \right|, \quad \text{i} \quad \left| D_k \right|.$$

Primijetimo da taj uvjet nije dovoljan. Npr. u niže navedenoj matrici

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

uokvirena dvoredna subdeterminanta zadovoljava gore navedene uvjete, a ipak postoji troredna (uokvirena) subdeterminanta koja je različita od nule, tako da matrica ima rang 3.

Razlika između manjeg od brojeva m i n i ranga r matrice zove se *defekt* matrice.

Ako matrica ima rang r, tada se r-redna subdeterminanta različita od nule nazive *temeljnom subdeterminantom*. Matrica može imati i više tih temeljnih subdeterminanata.

Pokažimo na primjerima, kako se određuje rang zadane matrice.

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

Zadana matrica je tipa (4×5), pa bi rang te matrice mogao biti najviše $m = 4$.

Subdeterminanta 2. reda, koja se nalazi u lijevom gornjem kutu je

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0,$$

dok je srednja subdeterminanta

$$D_2' = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2 \neq 0.$$

Zaokružimo je slijeva i odozdo susjednim elementima matrice (vidi matricu **A**!). Dobivamo subdeterminantu

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(2-1) + 4(-1-0) + 3(1+0) = 1 \neq 0.$$

Sad zaokružimo D_3 preostalim elementima matrice, a to se može načiniti samo na dva načina:

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{i} \quad D_4' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Pokaži da su obje subdeterminante jednaki nuli! Kako vidimo, od svih subdeterminanata različitih od nule najveći red ima subdeterminanta D_3, pa je

rang zadane matrice 3, dok je defekt $4 - 3 = 1$.

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

Matrica ima red $n = 3$, pa njen rang ne može biti veći od 3.

Računamo

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Računamo

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1(30-4) - 4 \cdot (12-12) + 2 \cdot (2-15) = 26 - 26 = 0.$$

Rang matrice je 2; defekt $3 - 2 = 1$.

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

Tip matrice je 3×5, dakle rang r ne može biti veći od 3.

$$D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 5 = 11 \neq 0.$$

Zaokružimo D_2 elementima matrice zdesna odozdo.

Dobivamo:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 14 \neq 0.$$

Rang $r = 3$; defekt $d = 3 - 3 = 0$.

Primjeri za vježbu

Odredi rang i defekt zadanih matrica:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. $\{r = 2,\ d = 0\}$.

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & 8 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. $\{r = 3,\ d = 0\}$.

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 6 & 3 & -3 \\ -6 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\{r = 1,\ d = 3\}$.

d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & 4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. $\{r = 3,\ d = 2\}$.

§ 8. RJEŠAVANJE LINEARNIH MATRIČNIH JEDNADŽBI

Znanje do sada navedenog gradiva omogućava rješavanje matričnih jednadžbi oblika

$$\mathbf{A\,X} = \mathbf{B} \quad \text{i} \quad \mathbf{Y\,A} = \mathbf{C}.$$

Tu su: **A** zadana regularna kvadratna matrica reda n

B i **C** zadane pravokutne matrice tipova $n \times r$, odnosno $r \times n$.

X i **Y** tražene matrice odgovarajućih tipova $n \times r$ i $r \times n$.

Znamo rješavati skalarne jednadžbe oblika $ax = b$ i $ya = c$, analogno rješavamo i matrične linearne jednadžbe:

$a x = b$	$\mathbf{A X} = \mathbf{B}$	$\mathbf{Y A} = \mathbf{C}$
$\frac{1}{a}$ postoji, ako je $a \neq 0$ množimo *slijeva* s $a^{-1} = \frac{1}{a}$.	množimo *slijeva* s $\mathbf{A}^{-1}$:	množimo *zdesna* s $\mathbf{A}^{-1}$:
$\frac{1}{a}(a x) = \frac{1}{a} \cdot b$	$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$	$\mathbf{Y A A}^{-1} = \mathbf{C A}^{-1}$
$x = \frac{b}{a}$.	$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.	$\mathbf{Y} = \mathbf{C A}^{-1}$.

Vidimo da je postupak pri rješavanju jednadžbi $ax = b$ i $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *formalno* isti.

Navodimo nekoliko primjera:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Za $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ računamo $\mathbf{A}^{-1}$ uzevši u obzir da je $\Delta = \det \mathbf{A} = 2$.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 7/2 & -2 \\ -3/2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ pa je } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 7/2 & -2 \\ -3/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadanu jednadžbu množimo s $\mathbf{A}^{-1}$ *slijeva*!

Dobivamo

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 24 & -5/2 \\ -10 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

b) $\mathbf{Y} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = (29 \;\; 16 \;\; 49)$.

Za $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ računamo $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\Delta = \det \mathbf{A} = -7; \quad \widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{matrix} A_{11} = -2; & A_{21} = -1; & A_{31} = +6. \\ A_{12} = -13; & A_{22} = +4; & A_{32} = +32; \\ A_{13} = +5; & A_{23} = -1; & A_{33} = -15. \end{matrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 6 \\ -13 & 4 & 32 \\ 5 & -1 & -15 \end{bmatrix} \frac{1}{-7}.$$

Zadanu jednadžbu množimo s $\mathbf{A}^{-1}$ *zdesna*!

$$Y = (29 \;\; 16 \;\; 49) \begin{bmatrix} -2 & -1 & 6 \\ -13 & 4 & 32 \\ 5 & -1 & -15 \end{bmatrix} \frac{1}{-7}.$$

$$Y = (-21 \;\; -14 \;\; -49)\left(-\frac{1}{17}\right) = (3 \;\; 2 \;\; 7).$$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 12 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

Računamo $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{29} \begin{bmatrix} 6 & 22 & -1 \\ 7 & 16 & -6 \\ 1 & 23 & -5 \end{bmatrix},$$

pa je

$$\mathbf{X} = \frac{1}{29} \begin{bmatrix} 6 & 22 & -1 \\ 7 & 16 & -6 \\ 1 & 23 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{29} \begin{bmatrix} 29 \\ 58 \\ -29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

ili
$$\mathbf{A\,X\,B} = \mathbf{C}.$$

Računamo $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ i množimo slijeva zadanu jednadžbu s $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{X} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Računamo produkt $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 9 \\ 12 & -14 \end{bmatrix}$, pa je

$$\mathbf{X} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 9 \\ 12 & -14 \end{bmatrix}.$$

Jednadžbu množimo *zdesna* s $\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

Dobivamo:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -7 & 9 \\ 12 & -14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 24 & 3 \\ -34 & -18 \end{bmatrix}}.$$

Primjeri za vježbu

Riješi zadane matrične jednadžbe.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. $\left(\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\right)$.

b) $\mathbf{Y} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$. $\left(\begin{bmatrix} -14 & 20 \\ -10 & 8 \end{bmatrix}\right)$.

c) $\mathbf{X} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$. $\left(\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}\right)$.

Promotrimo jednadžbu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Izmnožimo li matrice koje se nalaze na lijevoj strani jednadžbe, dobit ćem

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

S obzirom na definiciju jednakosti matrica zaključujemo da gornja relacij predočuje sustav od tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice x_1, x_2 i x_3.

Tu jednadžbu možemo kraće napisati u obliku

$$\mathbf{A\,X} = \mathbf{C}, \qquad \text{(a}$$

gdje je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Množenje slijeva jednadžbe (a) s $\mathbf{A}^{-1}$ daje:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A\,X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}, \text{ pa je } \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}, \text{ jer je } \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

Primjer.

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 4 \\ 3x + 7y - 3z &= 12 \\ x + 2y - z &= 3. \end{aligned}$$

U matričnom obliku jednadžba glasi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix}. \qquad \text{(b}$$

Za $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 3 & 7 & -3\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$ računamo $\mathbf{A}^{-1}$:

Recipročna matrica $\mathbf{A}^*$:

$$\begin{array}{lll} A_{11}=-1; & A_{12}=0; & A_{13}=-1;\\ A_{21}=-3; & A_{22}=1; & A_{23}=-1;\\ A_{31}=11; & A_{32}=-3; & A_{33}=4. \end{array}$$

$$\mathbf{A}^*=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ -3 & 1 & -1\\ 11 & -3 & 4\end{bmatrix}, \text{ pa je } \widetilde{\mathbf{A}}^*=\begin{bmatrix}-1 & -3 & 11\\ 0 & 1 & -3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}.$$

Kako je $\det \mathbf{A}=1$,

$$\mathbf{A}^{-1}=\widetilde{\mathbf{A}}^*=\begin{bmatrix}-1 & -3 & 11\\ 0 & 1 & -3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}.$$

Jednadžbu (b) pomnožimo slijeva s $\mathbf{A}^{-1}$.

Dobivamo

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -3 & 11\\ 0 & 1 & -3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\ 12\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\ 3\\ -4\end{bmatrix}$$

$$\underline{x=-7}, \quad \underline{y=3}, \quad \text{i} \quad \underline{z=-4}.$$

Primjeri za vježbu

Riješi pomoću matrica zadane linearne jednadžbe.

a) $x+2y=3$
$-x+y+4z=7$
$2x+3y-z=5.$ $\{x=15;\ y=-6,\ z=7\}$.

b) $x+2z-u=3$
$3y+2z+3u=10$
$4x+5z+2u=9$
$x+3y+z+7u=9$ $\left\{x=-2,\ y=\frac{1}{3},\ z=3,\ u=7\right\}$.

c) $x-y+5z=3$
$2x-3y-5z=4$
$3x-2y+6z=6.$ $\left\{x=\frac{5}{6},\ y=-\frac{9}{8},\ z=\frac{5}{24}\right\}$.

§ 9. PRIMJENA MATRIČNOG RAČUNANJA NA RJEŠAVANJE SUSTAVA LINEARNIH JEDNADŽBI U OPĆEM SLUČAJU

U pređašnjem poglavlju pokazali smo kako se rješavaju pomoću matrica sustavi linearnih jednadžbi u posebnom slučaju, tj. kad je broj nepoznanica n jednak broju jednadžbi m, a determinanta sustava različita je od nule. Takve sustave linearnih jednadžbi možemo rješavati i pomoću determinanata prema Cramerovim formulama *). Sad ćemo uzeti opći slučaj.

Primjena matrica dopušta prikazivanje sustava linearnih jednadžbi u zbijenom obliku i time znatno olakšava postupak. Napose, matrično računanje omogućava određivanje nekih skupina nepoznanica, pri čemu otpada potreba izračunavanja ostalih nepoznanica.

1. Sustav nehomogenih linearnih jednadžbi

Neka je zadan sustav od m nehomogenih linearnih jednadžbi s n nepoznanica

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right| . \qquad \text{(K)}$$

Sustav (K) nehomogenih jednadžbi naziva se *kompatibilnim*, ako postoji bar jedno rješenje $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, koje pretvara sve jednadžbe u identitete, odnosno *inkompatibilnim* ili *protivrječnim*, ako ne postoji niti jedno takvo rješenje. Kompatibilni sustav jednadžbi naziva se *određenim*, ako ima jedno rješenje, odnosno *neodređenim*, ako ima beskonačno mnogo rješenja.

Shema $\mathbf{A}$ koeficijenata sustava jednadžbi naziva se *matricom koeficijenata sustava jednadžbi*:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{bmatrix}.$$

Dodamo li matrici $\mathbf{A}$ koeficijenata sustava jednadžbi stupac slobodnih članova $b_1, b_2, \ldots, b_n$, dobit ćemo *proširenu matricu koeficijenata sustava jednadžbi*:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m\end{bmatrix}.$$

*) Vidi od istog pisca Repetitorij više matematike. Dio III, § 1.

Jednadžbe sustava (K) imaju rješenja onda i samo onda, ako je rang r matrice **A** *jednak* rangu s proširene matrice **B**.

Ako je $r < s$ jednadžbe su *protivrječne* pa nemaju rješenja.

Ako je $r = s = n$, što je moguće, ako je

broj jednadžbi $m \geqslant$ broju nepoznanica n, rješenje je *jednoznačno određeno*.

Postupak pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi (K):

1. Računamo rang matrica **A** i **B**, da se odredi je li zadani sustav kompatibilan ili protivrječan.

2. Premještamo jednadžbe sustava (K) tako da bi jednadžbe koje odgovaraju različitoj od nule subdeterminanti najvećeg ranga r matrice **A** došle u položaj koji odgovara gornjem lijevom kutu matrice **A** (taj premještaj otpada, ako je baš gornja lijeva kutna subdeterminanta ranga r različita od nule).

Tu mogu biti dva slučaja:

I. $r = n$, tj. rang matrice **A** jednak je broju nepoznanica sustava (K), pri čemu je

$r \leqslant m$, tj. rang matrice **A** jednak je ili manji od broja jednadžbi m sustava.

Rješavamo sustav od *prvih* n jednadžbi s n nepoznanica pa dobivamo jednoznačno rješenje $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, jer je determinanta tog sustava različita od nule.

U slučaju da je $n < m$, tj. sustav ima više jednadžbi nego nepoznanica, dobivena n rješenja zadovoljavaju i ostale $(m - n)$ jednadžbi, jer su posljedice prvih n jednadžbi. Sustav jednadžbi (K) je *određen*.

II. $r < n$, tj. rang r matrice **A** manji je od broja nepoznanica n, dok je rang r manji od broja jednadžbi m. Sustav (K) je *neodređen*.

U tom slučaju rješavamo sustav od *prvih* r jednadžbi s obzirom na prvih r nepoznanice, a zatim izrazimo ove nepoznanice pomoću ostalih $(n - r)$ nepoznanica $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Dobivamo jedino rješenje u obliku linearnih funkcija

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) \\ x_2 &= x_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_r &= x_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

jer je determinanta sustava jednadžbi različita od nule.

Nepoznanicama $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ možemo davati bilo koje vrijednosti, pa nepoznanice $x_1, x_2, \ldots, x_r$, određujemo prema formulama (a). Ta rješenja zadovoljavaju i ostalih $(m - r)$ jednadžbi (ako je $r < m$), koje su posljedice prvih. Sustav (K) je *neodređen*.

Primjeri.

a)
$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z - u + 2v &= 2 \\ 3x - y + 5z - 3u - v &= 6 \\ 2x + y + 2z - 2u - 3v &= 8 \end{aligned}\right| .$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -8 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 6 \\ -2 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 28 \neq 0,$$

pa je $\underline{r_A = 2}$. pa je $\underline{r_B = 3}$.

Kako je $r_A \neq r_B$, zadani sustav jednadžbi je <u>inkompatibilan pa nema rješenja</u>.

b)
$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ x - 2y - z &= 2 \\ 3x - y + 5z &= 3 \\ -2x + 2y + 3z &= -4. \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

$\underline{r_A = 3}$. $\underline{r_B = 3}$.

Kako je $r_A = r_B$ *sustav jednadžbi je kompatibilan*. Budući da je rang $r = 3$ jednak broju nepoznanica $n = 3$, imamo slučaj I. Premještaj jednadžbi sustava otpada, jer se subdeterminanta ranga 3 već nalazi u gornjem lijevom kutu matrice **A**. *Sustav je određen*. Riješimo sustav od tri prve jednadžbe, jer je u našem slučaju $r = 3$, a broj jednadžbi $m = 4$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \det \mathbf{A} = 7. \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -11/7 & 3/7 & 5/7 \\ -8/7 & -1/7 & 3/7 \\ 5/7 & -2/7 & -1/7 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x} = -\frac{11}{7} + \frac{6}{7} + \frac{15}{7} = \underline{\frac{10}{7}},$$

$$\underline{y} = -\frac{8}{7} - \frac{2}{7} + \frac{9}{7} = -\underline{\frac{1}{7}},$$

$$\underline{z} = \frac{5}{7} - \frac{4}{7} - \frac{3}{7} = -\underline{\frac{2}{7}}.$$

Ta rješenja zadovoljavaju i četvrtu jednadžbu, jer je ona posljedica prvih triju.

c) $$\left.\begin{array}{l} x - y + z - u = 1 \\ x - y - z + u = 0 \\ x - y - 2z + 2u = -1/2 \end{array}\right|.$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}. \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

$r_A = ?$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = 0, \text{ pa je } \underline{r_A = 2}.$$

$r_B = 2$, jer je

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1/2 \end{vmatrix} = 0.$$

$r_A = r_B$ sustav jednadžbi je kompatibilan, pa ima rješenje.

Rang $r_A = 2$ je manji od broja $n = 4$ nepoznanice, a $r_A = 2$ manji je od broja $m = 3$ jednadžbi pa imamo slučaj II. *Sustav je neodređen*, jer ima beskonačno mnogo rješenja.

Riješimo sustav od prvih dviju jednadžbi. Kako je prva lijeva kutna subdeterminanta matrice **A** jednake nuli, premjestimo stupac s x na četvrto mjesto da bi u prvi lijevi gornji kut došla subdeterminanta koja je različita od nule.

Zadani sustav jednadžbi prima oblik:

$$\left.\begin{array}{l} -y + z - u + x = 1 \\ -y - z + u + x = 0 \\ -y - 2z + 2u + x = -1/2 \end{array}\right|.$$

Riješimo sustav od prvih dviju jednadžbi i to s obzirom na y i z:

$$\left.\begin{array}{l} -y + z = 1 - x + u \\ -y - z = -x - u \end{array}\right| \pm$$

Dobivamo:

$$-2y = 1 - 2x, \quad \text{pa je } \underline{y = x - 1/2}$$

$$2z = 1 + 2u, \quad \text{pa je } \underline{z = u + 1/2}.$$

Ta rješenja zadovoljavaju sve jednadžbe zadanog sustava uz bilo koje vrijednosti x i u.

Primjeri za vježbu

Riješi zadane sustave linearnih nehomogenih jednadžbi.

a) $$\left.\begin{array}{l} x + 2y - z + u = 1 \\ 2x - y + 2z + 2u = 2 \\ 3x + y + z + 3u = 3 \\ x - 3y + 3z + u = 0 \end{array}\right|.$$ {Sustav je protivrječan}.

b) $$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 4 \\ 2x + 4y + z = 9 \\ x - y + z = -2 \\ 2x + 5y - 3z = 15 \end{array}\right|.$$ $\{x = 1;\ y = 2;\ z = -1\}$.

c) $$\left.\begin{array}{l} x - 2y + z + u = 1 \\ x - 2y + z - u = -1 \\ x - 2y + z + 5u = 5 \end{array}\right|.$$ $\{z = 2y - x;\ u = 1\}$.

d) $$\left.\begin{array}{l} 2x + y - z + u = 1 \\ 3x - 2y + 2z - 3u = 2 \\ 5x + y - z + 2u = -1 \\ 2x - y + z - 3u = 4 \end{array}\right|.$$ {Sustav je protivrječan}.

e) $\left.\begin{aligned} 2x - y + z - u &= 1 \\ 2x - y - 3u &= 2 \\ 3x - z + u &= -3 \\ 2x + 2y - 2z + 5u &= -6 \end{aligned}\right|$. $\qquad \left\{x = 0;\ y = 2;\ z = \frac{5}{3};\ u = -\right.$ [illegible]

f) $\left.\begin{aligned} x + y + z + u + t &= 7 \\ 3x + 2y + z + u - 3t &= -2 \\ y + 2z + 2u + 6t &= 23 \\ 5x + 4y + 3z + 3u - t &= 12 \end{aligned}\right|$. $\qquad \left\{\begin{aligned} x &= -16 + z + u + 5t; \\ y &= 23 - 2z - 2u - 6t \end{aligned}\right.$

g) $\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z - u &= 1 \\ 3x + 2y + z - u &= 1 \\ 2x + 3y + z + u &= 1 \\ 2x + 2y + 2z - u &= 1 \\ 5x + 5y + 2z &= 2 \end{aligned}\right|$. $\qquad \left\{x = \frac{1 + 5u}{6};\quad y = \frac{1 - 7u}{6};\quad z = \frac{1 + 5u}{6}\right\}$

2. Sustav homogenih linearnih jednadžbi

Taj sustav ima općenito oblik:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &= 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad & \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n &= 0 \end{aligned}\right|. \qquad \text{(L)}$$

Rang matrice **A** koeficijenata sustava (L) i rang proširene matrice su jednaki, pa je homogeni sustav uvijek kompatibilan.

Očito je da taj sustav ima *nulto rješenje* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, koje se zove *trivijalno*.

Da homogeni sustav jednadžbi ima rješenja različita od nultog nužno je i dovoljno da rang matrice **A** koeficijenata sustava bude manji od broja nepoznanica, tj. $r < n$, i sustav ima tada beskonačno mnogo rješenja oblika

$$\{k\,\alpha_1,\ k\,\alpha_2,\ \ldots,\ k\,\alpha_n\},$$

gdje je k bilo koji broj.

Ima li sustav (L) p rješenja različitih od nule

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\},\ \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\},\ \ldots,\ \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\} \qquad \text{(a)}$$

tada ima i beskonačno mnogo rješenja oblika

$$\{k_1\alpha_1 + k_2\beta_1 + \cdots + k_p\eta_1,\ k_1\alpha_2 + k_2\beta_2 + \cdots + k_p\eta_2, \ldots, k_1\alpha_n + k_2\beta_n + \cdots + k_p\eta_n\}, \qquad \text{(b)}$$

gdje su $k_1, k_2, \ldots, k_p$ bilo koji brojevi (svi ne smiju biti jednaki nuli).

Rješenja (b) su *linearne kombinacije* rješenja (a).

Rješenja (a) sustava jednadžbi (L) nazivaju se *linearno nezavisnim*, ako niti jedno od njih nije linearna kombinacija ostalih.

p tih linearno nezavisnih rješenja čine *temeljni sustav rješenja*, ako je bilo koje rješenje sustava jednadžbi (L) linearna kombinacija tih p rješenja.

Da homogeni sustav linearnih jednadžbi ima temeljni sustav rješenja, nužno je i dovoljno da je rang r matrice **A** koeficijenata jednadžbi (L) *manji* od broja n nepoznanica, dok za $r = n$ temeljni sustav ne postoji i jednadžbe imaju samo nulto rješenje.

Ako je $r < n$, temeljni sustav se sastoji od $(n - r)$ linearno nezavisnih rješenja.

Određivanje temeljnih sustava rješenja vrši se na način koji slijedi:

1. Određujemo red r matrice **A** koeficijenata zadanog sustava jednadžbi (L).
2. Stavimo u sustavu (L) jednadžbe i nepoznanice u takvom redu, da u lijevi gornji kut matrice **A** dođe subdeterminanta reda r. Ukoliko taj uvjet nije ispunjen, vršimo to premještanje jednadžbi, odnosno nepoznanica.
3. Rješavamo sustav (L) jednadžbi s obzirom na prvih r nepoznanica i to tako, da te nepoznanice izrazimo pomoću ostalih $(n - r)$ nepoznanica. Dobivamo jedino rješenje u obliku linearnih funkcija (c):

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1\,(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) \\ x_2 &= x_2\,(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_r &= x_r\,(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n). \end{aligned} \qquad \text{(c)}$$

Nepoznanicama $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ možemo davati bilo koje vrijednosti i one zajedno s odgovarajućim vrijednostima $x_1, x_2, \ldots, x_r$, koje se određuju prema (c), daju jedno od rješenja sustava jednadžbi (L).

Primjeri.

1. Odredi temeljne sustave rješenja zadanih sustava jednadžbi

a) $\left.\begin{aligned} x - y + 5z - u &= 0 \\ x + y - 2z + 3u &= 0 \\ 3x - y + 8z + u &= 0 \\ x + 3y - 9z + 7u &= 0 \end{aligned}\right|. \qquad r_A = ? \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 0$, također dobivamo da je $\det \mathbf{A} = 0$, pa je $r_A = 2$.

Kako je $r = 2 < n = 4$, imamo $4 - 2 = 2$ temeljna sustava linearnih nezavisnih rješenja zadanog sustava.

Rješavamo sustav jednadžbi s obzirom na x i y. Uzimajući $z = 1$ i $u = 0$ dobivamo *prvi temeljni sustav rješenja*:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= -5 \\ x + y &= 2 \end{aligned}\right| \quad x = -\frac{3}{2}, \quad y = \frac{7}{2}, \quad z = 1, \quad u = 0$$

$$\text{ili} \quad \left\{-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 1, 0\right\}.$$

Uzimajući $z = 0$ i $u = 1$ dobivamo *drugi temeljni sustav*:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= -3 \end{aligned}\right| \quad x = -1, \quad y = -2, \quad z = 0, \quad u = 1$$

$$\text{ili} \quad \{-1, -2, 0, 1\}.$$

Prema tome bilo koje rješenje sustava možemo prikazati u obliku

$$\left\{-\frac{3}{2}k_1 - k_2; \ \frac{7}{2}k_1 - 2k_2; \ k_1, \ k_2\right\},$$

gdje su k_1 i k_2 bilo koji brojevi (k_1 i k_2 ne smiju biti jednaki nuli istodobno) kombinirajući gornja dva sustava rješenja.

b) $$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ 3x + 2y \quad &= 0 \end{aligned}\right|.$$

Kako vidimo broj jednadžbi $m = 3$ jednak je broju nepoznanica $n = 3$.

Odredimo rang r matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$:

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$; $\det \mathbf{A} = 0$, pa je $r = 2$, a kako je $n = 3$, $r < n$, pa sustav jednadžbi ima $3 - 2 = 1$ temeljni sustav rješenja. Determinantu $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ ne treba premještati.

Stavimo $z = 1$ i riješimo sustav od prvih dviju jednadžbi:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - 1 &= 0 \\ x - y + 1 &= 0 \end{aligned}\right| \quad \text{Dobivamo: } x = -\frac{2}{5}; \ y = \frac{3}{5}.$$

Prema tome svako rješenje zadanog sustava jednadžbi možemo prikazati u obliku temeljnog sustava rješenja

$$\left\{x = -\frac{2}{5}k, \ y = \frac{3}{5}k; \ z = k\right\}$$

ili

$$\{x = -2k, \quad y = 3k; \quad z = 5k\}$$

gdje je k bilo koji broj različit od nule.

2. Odredi koji od zadanih homogenih sustava imaju rješenja različita od nule i izračunaj ta rješenja.

a) $$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - z + 5u &= 0 \\ 3x - y + 2z - 7u &= 0 \\ 4x + y - 3z + 6u &= 0 \\ x - 2y + 4z - 7u &= 0 \end{aligned}\right|.$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & -7 \end{bmatrix}.$$

Odredimo r_A. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$;

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 46 \neq 0$; $\det \mathbf{A} = 247 \neq 0$. Izračunaj to!

Kako je $r = 4$ i $n = 4$, zadani homogeni sustav ima samo nulto rješenje

$$x = y = z = u = 0.$$

b) $$\left.\begin{aligned} 2x - 4y + 5z + 3u &= 0 \\ 3x - 6y + 4z + 2u &= 0 \\ 4x - 8y + 17z + 11u &= 0 \end{aligned}\right|.$$

$r_A = ?$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 3 & -8 & 17 & 11 \end{bmatrix}.$$

Opažamo, da je $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$, dok je $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, a $\begin{vmatrix} -4 & 5 & 3 \\ -6 & 4 & 2 \\ -8 & 17 & 11 \end{vmatrix} = 0$

(pokaži to!). Slijedi: $r_A = 2$, dok je broj nepoznanica $n = 4$.

Kako je u našem slučaju $r < n$, zadani sustav jednadžbi ima rješenja različita od nule i to $n - r = 4 - 2 = 2$.

Premjestimo li determinantu $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$, koja je različita od nule, u lijevi gornji kut matrice $\mathbf{A}$, jednadžbe zadanog sustava dobit će redoslijed:

$$\left.\begin{array}{r} 5z + 3u + 2x - 4y = 0 \\ 4z + 2u + 3x - 6y = 0 \\ 17z + 11u + 4x - 8y = 0 \end{array}\right| .$$

Iz prve dvije jednadžbe dobivamo temeljni sustav od dvaju linearnih nezavisnih rješenja:

$$\underline{z = -\frac{5}{2}x + 5y} \quad \text{i} \quad \underline{u = \frac{7}{2}x - 7y.}$$

c) $$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z - u + t = 0 \\ 2x + y - z + 2u - 3t = 0 \\ 3x - 2y - z + u - 2t = 0 \\ 2x - 5y + z - 2u + 2t = 0 \end{array}\right| .$$

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{rrr:rr} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ \hdashline 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right];$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0. \text{ Pokaži to!}$$

Slijedi $r_A = 2$, a kako je $n = 5$ to je $n - r = 3$.

Rješavajući po x, y i z sustav od prvih triju jednadžbi zadanog sustava dobivamo:

$$\underline{x = \frac{-4u + 7t}{8}}; \quad \underline{y = \frac{-4u + 5t}{8}}; \quad \underline{z = \frac{4u - 5t}{8}}.$$

Primjeri za vježbu

a) $$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + z = 0 \\ 7x + 5y + 2z = 0 \\ x + 4y + 3z = 0 \end{array}\right| . \qquad \{x = y = z = 0\}.$$

b) $$\left.\begin{array}{r} 3x + 4y - 5z + 7u = 0 \\ 2x - 3y + 3z - 2u = 0 \\ 4x + 11y - 13z + 16u = 0 \\ 7x - 2y + z + 3u = 0 \end{array}\right| . \qquad \left\{x = \frac{3z - 13u}{17}, \quad y = \frac{19z - 20u}{17}\right\}.$$

§ 10. RASTAVLJANJE MATRICA U BLOKOVE

Ako je zadan sustav od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica, a naš je zadatak da odredimo vrijednosti samo k nepoznanica, dok vrijednosti preostalih $(n - k)$ nepoznanica nas ne zanimaju, matrice rastavljamo pravcima paralelnim sa stupcima i recima matrica u *blokove* kao matrične elemente zadane matrice, pa na taj način možemo znatno olakšati golemi posao pri izračunavanju inverzne matrice.

Promotrimo sustav linearnih jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11} x_1 + x_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \\ y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \\ \vdots \\ y_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n \end{array}\right| . \qquad \text{(a)}$$

Označimo li

s $\mathbf{Y}$ matricu $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, s $\mathbf{X}$ matricu $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, a s $\mathbf{A}$ matricu koeficijenata zadanog

sustava (a), tada taj sustav možemo prikazati u obliku

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\,\mathbf{X}.$$

Pretpostavimo da treba riješiti zadani sustav (a) s obzirom na prvih k nepoznanica $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

U tom slučaju pišemo matricu $\mathbf{A}$ u obliku:

$$a = \left[\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ \hdashline a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \hdashline \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{array}\right].$$

smatrajući na taj način da se matrica $\mathbf{A}$ sastoji od četiri matrice $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ i $\mathbf{A}_4$.

Na isti način dobivamo:

$$\mathbf{Y} = \left[\begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ \hdashline y_{k+1} \\ \vdots \\ y_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{Y}_1 \\ \hdashline \mathbf{Y}_2 \end{array}\right] \quad \text{i} \quad \mathbf{X} = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \hdashline x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{X}_1 \\ \hdashline \mathbf{X}_2 \end{array}\right].$$

Sustav (a) možemo dakle prikazati u obliku

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \hdashline \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \hdashline \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}.$$

S obzirom na formule za produkt matrica možemo smatrati da su matrice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_1$ i $\mathbf{Y}_2$ elementi sustava i napisati sustav u obliku

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_2$$
$$\mathbf{Y}_2 = \mathbf{A}_3 \mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_4 \mathbf{X}_2.$$

Da isključimo $\mathbf{X}_2$ odredimo iz druge jednadžbe

$$\mathbf{A}_4 \mathbf{X}_2 = \mathbf{Y}_2 - \mathbf{A}_3 \mathbf{X}_1 \mid \cdot \mathbf{A}_4^{-1}$$

a odatle je

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{A}_4^{-1} (\mathbf{Y}_2 - \mathbf{A}_3 \mathbf{X}_1).$$

Uvrštenje u prvu jednadžbu daje

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} (\mathbf{Y}_2 - \mathbf{A}_3 \mathbf{X}_1),$$

pa je

$$\mathbf{Y}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{Y}_2 = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3) \mathbf{X}_1. \qquad \text{(b)}$$

Time smo dobili sustav oblika $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{X}$ od k linearnih jednadžbi koje ne sadržavaju $x_{k+1}, \ldots, x_n$.

Primjeri.

1. Zadan je sustav od pet linearnih jednadžbi s pet nepoznanica. Riješi ga s obzirom na nepoznanice x_1 i x_2.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 9 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= -16 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 &= 2 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= -12 \end{aligned}\right| .$$

Rastavivši zadani sustav jednadžbi na blokove

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ \hdashline 2 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 4 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \hdashline \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{array}\right]; \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hdashline x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \hdashline \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}; \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ \hdashline -16 \\ 2 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \hdashline \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}.$$

i uzevši u obzir da je u našem slučaju

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} -16 \\ 2 \\ -12 \end{bmatrix},$$

svodimo sustav na oblik $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{X}$ i rješavamo zadatak prema jednadžbi (b):

$$\mathbf{Y}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{Y}_2 = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3) \mathbf{X}_1.$$

Na poznati način dobivamo

$$\mathbf{A}_4^{-1} = -\frac{1}{112} \begin{bmatrix} 4 & -16 & 14 \\ -10 & -16 & -7 \\ 28 & 0 & -14 \end{bmatrix},$$

pa je

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} = -\frac{1}{112} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -16 & 14 \\ -10 & -16 & -7 \\ 28 & 0 & -14 \end{bmatrix} = -\frac{1}{112} \begin{bmatrix} 22 & -32 & -7 \\ 90 & -80 & -49 \end{bmatrix},$$

dok je

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{Y}_2 = -\frac{1}{112} \begin{bmatrix} -332 \\ -1012 \end{bmatrix}.$$

Slijedi

$$\mathbf{Y}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{Y}_2 = +\frac{1}{112} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

to je lijeva strana jednadžbe (b), jer je

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} + \frac{1}{112} \begin{bmatrix} -332 \\ -1012 \end{bmatrix} = \frac{1}{112} \begin{bmatrix} 336 - 332 \\ 1008 - 1012 \end{bmatrix} = \frac{1}{112} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Sada računajmo desnu stranu jednadžbe (b):

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3 = -\frac{1}{112} \begin{bmatrix} 22 & -32 & -7 \\ 90 & -80 & -49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = +\frac{1}{112} \begin{bmatrix} 45 & 49 \\ 11 & 119 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{112} \begin{bmatrix} 45 & 49 \\ 11 & 119 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{112} \left\{ \begin{bmatrix} 112 & 112 \\ 112 & 224 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 45 & 49 \\ 11 & 119 \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{112} \begin{bmatrix} 67 & 63 \\ 101 & 105 \end{bmatrix},$$

pa desna strana jednadžbe glasi

$$(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3)\mathbf{X}_1 = \frac{1}{112}\begin{bmatrix} 67 & 63 \\ 101 & 105 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Izjednačimo li izraze dobivene za lijevu i desnu stranu jednadžbe prethodno pomnoživši ih s 112, dobit ćemo

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 & 63 \\ 101 & 105 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

a odatle slijedi

$$\begin{aligned} 4 &= 67\,x_1 + 63\,x_2 \\ -4 &= 101\,x_1 + 105\,x_2. \end{aligned}$$

Riješenja tih jednadžbi glase

$$\underline{x_1 = 1}$$

$$\underline{x_2 = -1.}$$

2. Riješi zadani sustav jednadžbi s obzirom na x_1 i x_2.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 11 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}\right|.$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}.$$

Računamo prema jednadžbi (b):

$$\mathbf{A}_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{A}_4^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 23 & -7 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{Y}_2 = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 23 & -7 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -35 \\ -20 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{Y}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -35 \\ -20 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\left\{\begin{bmatrix} 44 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -35 \\ -20 \end{bmatrix}\right\} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 9 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

To je vrijednost lijeve strane jednadžbe (b).

Računajmo desnu stranu te jednadžbe:

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3 = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 23 & -7 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 62 & 39 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 62 & 39 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\left\{\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 62 & 39 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 66 & 47 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3)\mathbf{X}_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 66 & 47 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 66\,x_1 + 47\,x_2 \\ 4\,x_1 + 0 \end{bmatrix}.$$

To je vrijednost desne strane jednadžbe (b).

Izjednačimo li vrijednosti dobivene za lijevu i desnu stranu jednadžbe, dobit ćemo:

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 9 \\ -8 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 66\,x_1 + 47\,x_2 \\ 4\,x_1 \end{bmatrix},$$

a odatle slijedi:

$$\begin{aligned} 66\,x_1 + 47\,x_2 &= 9 \\ 4\,x_1 &= -8, \end{aligned}$$

pa je

$$\underline{x_1 = -2.}$$

Uvrštenje $x_1 = -2$ u prvu jednadžbu daje

$$\underline{x_2 = 3.}$$

Primjeri za vježbu

Rastavivši u blokove matrice zadanih sustava linearnih jednadžbi odredi x_1 i x_2.

a) $$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5 \end{aligned}\right|. \qquad \{x_1 = -2;\ x_2 = 2\}.$$

b) $$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= -3 \end{aligned}\right|. \qquad \{x_1 = 2;\ x_2 = 0\}.$$

§ 11. SVOJSTVA TROKUTNIH MATRICA

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdot & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

1. Determinanta bilo koje trokutne matrice gornje ili donje jednaka je produktu njenih elemenata, koji se nalaze na glavnoj dijagonali, jer računanje vrijednosti trokutne matrice neposredno daje:

$$\det \mathbf{A}_1 = \det \mathbf{A}_2 = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \dots a_{nn}.$$

Npr. za $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ dobivamo neposredno $\det \mathbf{A} = 2 \cdot 3 \cdot (-5) = \underline{-30}$, ako razvijemo determinantu po elementima prvog retka.

2. Produkt dviju gornjih trokutnih matrica, odnosno dviju donjih matrica istog reda daje gornju, odnosno donju trokutnu matricu.

Npr.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 8 + 3 \cdot (-7) + 4 \cdot 10 \\ 0 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot (-7) + 6 \cdot 10 \\ 0 & 0 & 7 \cdot 10 \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{\begin{bmatrix} 2 & 14 & 35 \\ 0 & 10 & 25 \\ 0 & 0 & 70 \end{bmatrix}}.$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -5 & 8 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 9 & -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 5 & 0 & 0 \\ 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 & 4 \cdot (-2) & 0 \\ -5 \cdot 5 + 8 \cdot 4 + 6 \cdot 9 & 8 \cdot (-2) + 6 \cdot (-3) & 6 \cdot 7 \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 26 & -8 & 0 \\ 61 & -34 & 42 \end{bmatrix}}.$$

Pokaži na isti način da je

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 50 & -15 & 0 \\ 85 & 11 & -48 \end{bmatrix}}.$$

3. Produkt trokutnih matrica istog reda gornje i donje, odnosno donje i gornje, daje kvadratnu matricu istog reda.

Npr.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 10 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 5 \cdot 10 & 5 \cdot 7 \\ 1 \cdot 6 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 4 \cdot 10 & 4 \cdot 7 \\ 11 \cdot 1 & 11 \cdot 10 & 11 \cdot 7 \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{\begin{bmatrix} 29 & 54 & 35 \\ 10 & 42 & 28 \\ 11 & 110 & 77 \end{bmatrix}}.$$

4. Produkt trokutnih matrica istoga reda gornje i donje, odnosno donje i gornje daje kvadratnu matricu istog reda.

Npr.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 10 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 5 \cdot 10 & 5 \cdot 7 \\ 1 \cdot 6 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 4 \cdot 10 & 4 \cdot 7 \\ 11 \cdot 1 & 11 \cdot 10 & 11 \cdot 7 \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{\begin{bmatrix} 29 & 54 & 35 \\ 10 & 42 & 28 \\ 11 & 110 & 77 \end{bmatrix}}.$$

Može se pokazati da vrijedi i obrat: svaku kvadratnu matricu, kojoj su sve subdeterminante a_{11}, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ itd. do $\det \mathbf{A}$ uklj. različite od nule, možemo prikazati u obliku produkta trokutnih matrica različitog oblika (donje i gornje, gornje i donje), ali istog reda. Ako fiksiramo dijagonalne elemente jedne od trokutnih matrica, npr. pretpostavivši da su 1, dobit ćemo jednoznačan rastav.

Primjer.

Prikaži zadanu matricu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ u obliku produkta dviju trokutnih matrica.

Kako je

$$a_{11} = 2 \neq 0; \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 7 \neq 0, \dots, \det \mathbf{A} = 11 \neq 0,$$

stavimo

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & y_{12} & y_{13} \\ 0 & 1 & y_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{11} y_{12} & x_{11} y_{13} \\ x_{21} & x_{21} y_{12} + x_{22} \cdot 1 & x_{21} y_{13} + x_{22} y_{23} \\ x_{31} & x_{31} y_{12} + x_{32} \cdot 1 & x_{31} y_{13} + x_{32} y_{23} + x_{33} \cdot 1 \end{bmatrix}.$$

Iz jednakosti prve i posljednje matrice slijedi:

$$\begin{array}{lll} x_{11} = 2 & x_{11} y_{12} = -1 & x_{11} y_{13} = 0 \\ x_{21} = 3 & x_{21} y_{12} + x_{22} = 2 & x_{21} y_{13} + x_{22} y_{23} = 4 \\ x_{31} = 4 & x_{31} y_{12} + x_{32} = 1 & x_{31} y_{13} + x_{32} y_{23} + x_{33} = 5. \end{array}$$

Rješenja tih jednadžbi glase:

$$\begin{array}{lll} x_{11} = 2 & x_{22} = 7/2 & y_{12} = -1/2 \\ x_{21} = 3 & x_{32} = 3 & y_{13} = 0 \\ x_{31} = 4 & x_{33} = 11/7 & y_{23} = 8/7, \end{array}$$

pa je

$$\underline{\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 7/2 & 0 \\ 4 & 3 & 11/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & 8/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.}$$

Rastavi na isti način zadanu kvadratnu matricu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 14 \end{bmatrix}$, na dvije trokutne matrice:

$$\left\{ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

5. Gornjoj trokutnoj matrici **A** odgovara inverzna matrica $\mathbf{A}^{-1}$ koja je također gornja trokutna matrica istoga reda.

Pokažimo to na primjeru.

Za trokutnu matricu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ odredi inverznu matricu $\mathbf{A}^{-1}$.

Pretpostavimo da je $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$.

Elemente α matrice $\mathbf{A}^{-1}$ odredimo iz poznate nam definicije inverzne matrice:

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izmnožimo matrice koje se nalaze na lijevoj strani jednakosti:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \cdot 3 & \alpha_{11} \cdot 5 + \alpha_{12} \cdot 7 & \alpha_{11} \cdot 4 + \alpha_{12} \cdot 2 + \alpha_{13} \cdot 6 \\ \alpha_{21} \cdot 3 & \alpha_{21} \cdot 5 + \alpha_{22} \cdot 7 & \alpha_{21} \cdot 4 + \alpha_{22} \cdot 2 + \alpha_{23} \cdot 6 \\ \alpha_{31} \cdot 3 & \alpha_{31} \cdot 5 + \alpha_{32} \cdot 7 & \alpha_{31} \cdot 4 + \alpha_{32} \cdot 2 + \alpha_{33} \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iz jednakosti dviju matrica slijedi:

Iz I retka:

$$3\alpha_{11} = 1; \qquad 5\alpha_{11} + 7\alpha_{12} = 0; \qquad 4\alpha_{11} + 2\alpha_{12} + 6\alpha_{13} = 0;$$

$$\frac{5}{3} + 7\alpha_{12} = 0; \qquad \frac{4}{3} - \frac{10}{21} + 6\alpha_{13} = 0;$$

$$\underline{\alpha_{11} = \frac{1}{3};} \qquad \underline{\alpha_{12} = -\frac{5}{21};} \qquad \underline{\alpha_{13} = -\frac{1}{7}.}$$

Iz II retka:

$$3\alpha_{21} = 0; \qquad 5\alpha_{21} + 7\alpha_{22} = 1; \qquad 4\alpha_{21} + 2\alpha_{22} + 6\alpha_{23} = 0;$$

$$7\alpha_{22} = 1; \qquad \frac{2}{7} + 6\alpha_{23} = 0;$$

$$\underline{\alpha_{21} = 0;} \qquad \underline{\alpha_{22} = \frac{1}{7};} \qquad \underline{\alpha_{23} = -\frac{1}{21}.}$$

Iz III retka:

$$3\alpha_{31} = 0; \qquad 5\alpha_{31} + 7\alpha_{32} = 0; \qquad 4\alpha_{31} + 2\alpha_{32} + 6\alpha_{33} = 1;$$

$$\underline{\alpha_{31} = 0;} \qquad \underline{\alpha_{32} = 0;} \qquad \underline{\alpha_{33} = \frac{1}{6}.}$$

Tražena inverzna matrica glasi:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -5/21 & -1/7 \\ 0 & 1/7 & -1/21 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

Primjeri za vježbu

Izračunaj inverzne matrice za zadane trokutne matrice

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. $\left\{ \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/10 & -9/40 \\ 0 & 1/5 & -7/20 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \right\}$.

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. $\left\{ \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \right\}$.

Znak: 7519 Sv.

Izdanje:

Dr ing. Boris Apsen

REPETITORIJ VIŠE MATEMATIKE

IV. DIO

KOMPLEKSNI BROJEVI - MATRICE

Izdavač:

TEHNIČKA KNJIGA, izdavačko poduzeće

OOUR »IZDAVAČKA DJELATNOST«

ZAGREB, Jurišićeva 10

Za izdavača odgovara

Glavni urednik:

ZVONIMIR VISTRIČKA

Urednik edicije:

IVAN UREMOVIĆ

Crteže izradio:

TOMISLAV STRUIĆ

Korigirao:

AUTOR

Tisak:

GRAFIČKI ZAVOD HRVATSKE, ZAGREB

Meter:

EMANUEL DRAGOJEVIĆ

Tisak dovršen:

U KOLOVOZU 1975.

Oslobođeno osnovnog poreza na promet na temelju mišljenja Republičkog sekretarijata za prosvjetu, kulturu i fizičku kulturu SR Hrvatske.